

Techniques numériques pour le traitement du signal

Joël Le Roux

20 novembre 2000

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Essai de caractérisation du domaine couvert par le traitement du signal	4
1.2	Les principales classes d'applications	5
1.3	Plan du cours	6
2	Principales bases théoriques	7
2.1	Théorie des systèmes linéaires invariants dans le temps ou filtres	7
2.1.1	Une propriété importante des systèmes linéaires invariants dans le temps	10
2.1.2	Autres représentations des systèmes	10
2.1.3	Notions importantes: causalité et stabilité	11
2.2	Représentation des signaux dans le domaine des fréquences, la transformée de Fourier	11
2.3	Représentation des signaux périodiques sous la forme de séries de Fourier	11
2.3.1	Quelques propriétés des séries de Fourier	14
2.4	La transformée de Fourier	14
2.5	Quelques propriétés de la transformée de Fourier	15
2.5.1	Translation dans le domaine temporel	16
2.5.2	Multiplication par une sinusoïde, translation en fréquence	16
2.5.3	Transformée de Fourier d'une convolution	16
2.5.4	Transformée de Fourier d'un produit de fonctions	18
2.5.5	Conservation de l'énergie, théorème de Parseval	19
2.5.6	Représentation simultanée des transformées de Fourier des signaux périodiques et des signaux quelconques	19
3	L'échantillonnage des signaux	20
3.1	Interprétation de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences	21
3.2	Reconstruction du signal à temps continu à partir des échantillons	23
3.2.1	Reconstruction idéale	23
3.2.2	Reconstruction effective des signaux à temps continu	26
3.3	La quantification des signaux	26
4	La représentation des signaux échantillonnés et des filtres numériques, la transformée en z	28
4.1	Définition de la transformée en z	28
4.2	Propriétés de la transformée en z	30
4.2.1	Linéarité	30
4.2.2	Rayons de convergence	30
4.2.3	Décalage des signaux	30
4.2.4	Transformée d'une convolution discrète	30
4.3	L'inverse de la transformée en z	31
4.4	Autre expression de la transformée en z inverse	32
4.4.1	Transformée en z d'un produit, convolution circulaire	32
4.5	Relation avec la transformée de Fourier	32
4.5.1	Expression du carré module de la transformée de Fourier en termes de transformée en z	33

4.5.2	Liens avec la transformée de Laplace	33
5	Le filtrage des signaux échantillonnés	35
5.1	Rappel sur la convolution discrète	35
5.1.1	Réponse en fréquence d'un filtre	36
5.2	Causalité, Stabilité	36
5.3	Les filtres à réponse impulsionnelle finie	36
5.3.1	Interprétation de l'effet du filtre dans le domaine des fréquences	36
5.3.2	Les filtres à réponse impulsionnelle symétrique	36
5.3.3	Filtre à déphasage minimal	38
5.4	Les filtres à réponse impulsionnelle infinie	38
5.4.1	Stabilité des filtres récursifs	39
5.4.2	Analyse de la stabilité du filtre récursif: l'algorithme de Schur-Cohn	40
5.5	exemples de filtres du premier et du deuxième ordre	40
5.5.1	Analyse en fréquence d'un filtre non récursif du premier ordre	40
5.5.2	Analyse en fréquence d'un filtre récursif du premier ordre	41
5.5.3	Analyse en fréquence d'un filtre non récursif du deuxième ordre	41
5.5.4	Analyse en fréquence d'un filtre récursif du deuxième ordre	41
5.6	Notions sur la synthèse des filtres numériques	45
5.6.1	Filtres à réponse impulsionnelle finie	45
5.6.2	Synthèse des filtres récursifs	46
5.6.3	Utilisation des techniques de prédiction linéaire	47
5.7	Structures de filtres récursifs	48
5.7.1	Différentes décompositions possibles	48
5.7.2	Filtre en treillis	48
5.7.3	Représentation d'état	50
6	La transformée de Fourier discrète	52
6.1	La transformée de Fourier discrète	52
6.2	La transformée inverse	52
6.3	Les propriétés de la transformée de Fourier discrète	54
6.4	La transformée en cosinus	56
6.5	L'algorithme de calcul de transformée de Fourier rapide	56
6.5.1	Calcul du nombre d'opérations à effectuer	58
6.5.2	Remarques pratiques	59
6.6	Les limitations en résolution de la transformée de Fourier discrète	59
6.7	Les fenêtres d'analyse spectrale	60
6.8	Présentation graphique des résultats de la transformée de Fourier discrète	61
7	Signaux aléatoires	62
7.1	Les principales notions de probabilités utilisées	62
7.2	Les résultats principaux concernant les signaux aléatoires réels à temps continu	64
7.2.1	Moyenne	64
7.2.2	Fonction d'autocorrélation	64
7.2.3	Densité spectrale	65
7.2.4	Cas des variables aléatoires gaussiennes	66
7.2.5	Le bruit blanc	66
7.2.6	Filtrage des signaux aléatoires	68
7.2.7	Représentation des signaux comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc	69
7.3	Les signaux aléatoires échantillonnés	70
7.3.1	L'échantillonnage des signaux aléatoires	70
7.3.2	Moyenne et fonction de covariance des signaux aléatoires échantillonnés	70
7.3.3	Cas des signaux stationnaires et ergodiques	70
7.3.4	Fonction d'intercorrélation	71
7.3.5	Densité spectrale des signaux aléatoires échantillonnés	72
7.3.6	Justification approximative du calcul de la densité spectrale à partir de la fonction d'autocorrélation	73

7.3.7	Calcul de la fonction d'autocorrélation à partir de la densité spectrale . . .	74
7.3.8	Un exemple en transmission numérique	74
7.3.9	Séquences d'échantillons indépendants et identiquement distribués	75
7.3.10	Génération d'une séquence de variables pseudo aléatoires	75
7.3.11	Filtrage des signaux aléatoires échantillonnés	76
7.3.12	Estimation spectrale	77
7.3.13	Filtrage de Wiener	78
8	Prédiction linéaire	81
8.1	Modèles autorégressifs	81
8.2	Algorithme de Levinson	82
8.3	Equivalence des algorithmes de Levinson et de Schur Cohn	84
8.4	Cas des signaux vectoriels et complexes	85
8.5	Justification de la méthode d'identification	85
8.6	Critère de similarité entre densités spectrales	86
8.7	Application à l'analyse et la synthèse de la parole	87
8.8	Application à la synthèse de filtres linéaires	88
8.9	Modèles à moyenne mobile (MA), factorisation spectrale	88

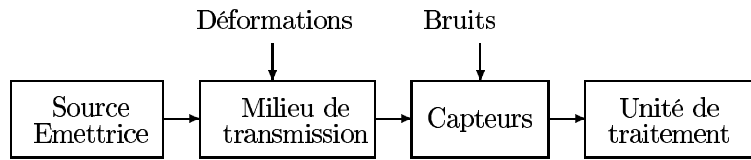


Figure 1: Schéma d'un système de génération et de traitement du signal

Ce document comporte encore pas mal d'erreurs; merci de me les signaler en me faisant parvenir un message à l'adresse suivante

leroux@essi.fr

D'autres documents de cours sont disponibles sur le site

www.essi.fr/~leroux/

1 Introduction

1.1 Essai de caractérisation du domaine couvert par le traitement du signal

Traiter un signal, c'est extraire de l'information de mesures effectuées par des capteurs en vue d'atteindre un but donné. Ce but peut aller de la compréhension du monde physique (les physiciens, les météorologues, les géologues, les chimistes ou les biologistes, etc...) à l'action sur ce monde (en robotique, dans les applications militaires, etc...) en passant par la reconstruction d'un message transmis au moyen d'un médium physique, comme une onde, utilisé pour le transporter (c'est le cas des sons, des signaux de télécommunications, des signaux sonar ou radar). Ceci couvre des domaines d'applications extrêmement variés: dès qu'on utilise un capteur pour mesurer une quantité, on est amené à effectuer un traitement. Un schéma relativement général est donné par la figure 1.

Le phénomène physique qui a fait réagir le capteur a , en général, été émis par une ou plusieurs sources et présente des variations temporelles (comme un signal sonore) ou spatiales (par exemple une scène qu'on photographie ou qu'on filme). Ces sources émettent ou réémettent des signaux qui sont transmis par un milieu par exemple sous la forme d'ondes électromagnétiques, de sons, etc... Ces ondes qui portent l'information sur les sources peuvent être déformées: étalées dans le temps, atténuées ou retardées en fonction de la fréquence, réfléchies par des obstacles, etc... L'analyse et la compensation des déformations de formes très variables apportées par le milieu de transmission est sans doute un des problèmes centraux du traitement du signal.

Le signal mesuré par les capteurs est, la plupart du temps, entaché d'un bruit de mesure. Il présente des fluctuations qui ne sont pas uniquement déterminées par le phénomène étudié et qui peuvent en compliquer considérablement l'analyse. C'est par exemple le cas d'un signal déformé par un canal de transmission, d'un signal acoustique modifié par des échos et pollué par les signaux émis par d'autres sources sonores. La présence de ces perturbations et les tentatives pour en atténuer les effets, en particulier dans le domaine des télécommunications, sont à la base du développement de la théorie du signal.

Dans d'autres applications, c'est la grande variabilité du signal émis qui a suscité le développement de techniques de traitement numérique du signal, en particulier les techniques de reconnaissances de formes. Par exemple, il y a tellement de variations entre les formes possibles d'un son élémentaire du langage parlé (un phonème), qu'on ne sait toujours pas concevoir une machine capable de reconnaître une phrase dite par quelqu'un dont elle n'a pas appris les caractéristiques vocales.

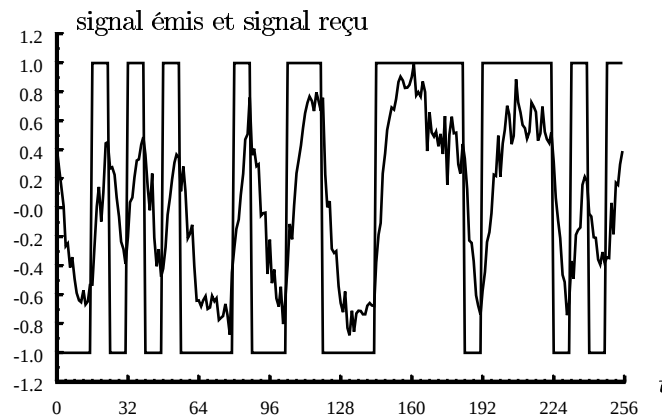


Figure 2: Exemple de signal de communication déformé par un canal et par addition d'un bruit

De manière générale, on peut dire que le signal mesuré par un capteur n'est pas parfaitement prévisible (il n'y aurait alors aucune raison de l'étudier.) Cependant, il n'est pas complètement imprévisible, car dans ce cas il ne serait pas possible d'en effectuer un traitement pour en extraire de l'information. Ces caractéristiques, perturbations et absence de prévisibilité, nécessiteront l'utilisation fréquente d'outils développés dans le cadre de la théorie des probabilités.

La seconde caractéristique suppose un certain degré de "prédictibilité" du signal. Le concepteur de l'unité de traitement du signal dispose d'une certaine connaissance sur le signal. Il aura donc à l'utiliser pour extraire les informations utiles du signal étudié, ce qui n'est pas toujours simple.

Il y a une autre difficulté au traitement des signaux mesurés dans le monde réel: leurs caractéristiques, même en termes de probabilités, ne sont en général pas parfaitement connues et un traitement ne s'avèrera utile que si son efficacité est démontrée sur des données réelles. Cela semble une banalité, mais il est regrettable que de nombreuses méthodes de traitement de signaux ne sont validées et justifiées que par des simulations sur des "cas d'école" abstraits: les signaux générés artificiellement présentent tous les hypothèses requises et les méthodes proposées permettent d'atteindre les objectifs fixés. Pourtant dès qu'on les confronte à des signaux réels, elles s'avèrent décevantes parce que les hypothèses retenues (souvent simplificatrices) pour la simulation ne correspondent pas toujours à la réalité des phénomènes mesurés.

Les quelques remarques précédentes sont des remarques banales et de bon sens, mais elles méritent tout de même d'être rappelées. En particulier, la réflexion sur les informations dont dispose le "traiteur de signaux" est trop souvent éludée par le concepteur de systèmes de traitement, qui se contente d'en donner une formalisation imprécise ou de les ramener à des modèles connus et manipulables mais qui sont excessivement simplificateurs. La recherche de cette connaissance sur les signaux et la manière dont ils ont été émis ou perturbés est probablement la partie fondamentale de l'étude et de la mise au point d'un système de traitement de signaux. C'est aussi la source d'une grande diversité dans les techniques de traitement. Cette diversité des techniques en fonction des applications permet difficilement de considérer le traitement du signal comme l'application d'une théorie; c'est parfois un regroupement de recettes variées très spécifiques des applications visées. Elles sont regroupées parce qu'elles relèvent des caractéristiques mentionnées ci-dessus: on traite de données mesurées par un capteur et ces données présentent des fluctuations qui ne sont pas parfaitement prévisibles. Il y a toutefois un certain nombre d'outils communs qui servent de base à beaucoup de méthodes et enseignés dans la plupart des cours d'initiation au traitement du signal. Ce cours a lui aussi pour but de décrire ces méthodes de base.

1.2 Les principales classes d'applications

On peut citer comme domaines d'application l'émission et la réception des signaux de communication sur câbles électriques, sur fibres optiques ou par ondes hertziennes, l'analyse, la synthèse et la compréhension du signal vocal ou des signaux musicaux, l'analyse des signaux biomédicaux (électrocardiogramme, électroencéphalogramme, ...), des signaux sonar en acoustique sous-marine.

Un autre domaine important est celui des signaux radar ou le signal émis est déformé par une cible ou un obstacle avant d'être mesuré par le capteur. C'est la déformation du signal par l'obstacle qui donnera une information utile sur cet obstacle.

Dans certains domaines d'applications, il est nécessaire de disposer de plusieurs capteurs, dont la géométrie constitue une antenne (sons stéréophoniques, localisation de sources de bruits, mesure de signaux en géophysique ou en sismique).

Dans d'autres applications on a d'autres variables que le temps, comme en traitement d'images photographiées par satellites, les images mesurées en radiologie (scanner, résonance magnétique nucléaire).

1.3 Plan du cours

Le second chapitre donnera les notions essentielles sur les signaux à temps continu (convolution, transformée de Fourier).

Le troisième expliquera la théorie de l'échantillonnage.

Le quatrième chapitre présentera la "transformée en z " qui est l'outil de base pour l'analyse des signaux et des filtres numériques.

Le cinquième sera une introduction à l'étude des filtres numériques. On y abordera succinctement les méthodes de conception de ces filtres.

Le sixième chapitre portera sur l'étude de la transformée de Fourier discrète, en particulier de l'algorithme de transformée de Fourier rapide.

Le septième chapitre porte sur les outils élémentaires pour l'étude des signaux aléatoires.

Le huitième chapitre décrit une technique de modélisation des signaux qui présente plusieurs intérêts : utilisation de techniques mathématiques relativement élaborées, bonne adaptation au traitement de signaux réels comme le signal de parole et application effective comme le codage de la parole à débit réduit en téléphonie mobile.

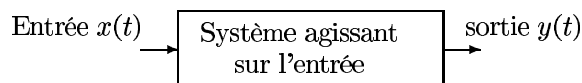


Figure 3: Représentation usuelle d'un système linéaire

2 Principales bases théoriques

Deux théories sont fondamentales pour la formulation des problèmes de traitement du signal. La première est liée aux hypothèses faites sur la propagation des signaux, et plus généralement des ondes dans un milieu: c'est la théorie des systèmes linéaires, plus particulièrement dans le cas le plus simple, celui des systèmes linéaires invariants dans le temps. Cet outil permet de prévoir la réponse d'un système à l'entrée ou à la commande qui lui est appliquée. La seconde, liée au caractère aléatoire des phénomènes étudiés est la théorie des probabilités. Elle permet de représenter correctement et d'extraire au mieux les informations fournies par un phénomène aléatoire.

Ces deux théories font souvent appel aux mêmes opérateurs mathématiques. Elles utilisent, du moins dans le cas du traitement numérique du signal des méthodes relativement simples (développées essentiellement avant les années 1920-1930) et qu'il est possible de traduire et de mettre en pratique sous forme d'opérations arithmétiques élémentaires (additions, multiplications, divisions, calcul de racines, ...) programmables sur calculateurs. On peut raisonnablement espérer qu'elles suffisent pour modéliser correctement le monde physique.

Un rappel des principaux résultats de la théorie des probabilités utilisés en traitement du signal est donné en annexe. L'outil fondamental est le calcul de la corrélation entre deux variables aléatoires $E(xy)$.

Il faut tout de même remarquer que de nombreuses méthodes, en particulier dans le domaine de la reconnaissance des formes se passent de ces théories car leur formalisme s'adapte mal au problème posé, comme dans le cas de la recherche de formes élémentaires dans une image.

2.1 Théorie des systèmes linéaires invariants dans le temps ou filtres

Dans de nombreuses applications fondées sur la propagation des ondes, en acoustique ou en électromagnétisme, on simplifie considérablement les problèmes étudiés en faisant des hypothèses sur la manière dont un système déforme un signal. Deux des hypothèses les plus importantes sont la linéarité et l'invariance dans le temps. Elles semblent, du moins à notre échelle, bien représenter le comportement de nombreux systèmes physiques.

Lorsqu'un système est linéaire et invariant dans le temps (SLIT), on a les propriétés suivantes: si l'entrée $x(t)$ produit une sortie $y(t)$ (voir fig. 3), quand on applique une entrée $kx(t)$, la sortie sera $ky(t)$. Si deux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ engendrent deux sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$, alors $x_1(t) + x_2(t)$ engendrera $y_1(t) + y_2(t)$ (linéarité). S'il y a invariance dans le temps, une translation de l'entrée ($x(t) \rightarrow x(t - \tau)$) se traduira par une même translation dans le temps de la sortie $y(t) \rightarrow y(t - \tau)$.

Notez que la multiplication d'un signal par une fonction du temps est une opération linéaire, mais n'est pas une opération invariante dans le temps.

Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle soit $h(t)$. C'est le signal qu'on obtient en sortie si on applique en entrée une impulsion "de Dirac" $\delta(t)$ qui a la définition suivante:

$$\int_{-A}^A \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (1)$$

Elle donne la valeur $f(0)$ de la fonction $f(t)$ à l'origine. On ne peut la formaliser correctement que dans le cadre de la théorie des distributions. De manière quelque peu incorrecte, on peut se

la représenter sous la forme d'une fonction nulle en dehors d'un intervalle étroit (de largeur ε) entourant l'origine et d'une amplitude très grande ($1/\varepsilon$) de telle sorte que son intégrale soit égale à 1. On fait alors tendre la largeur de l'intervalle vers 0.

Si un système est un SLIT caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$, on peut en déduire l'effet d'une entrée $x(t)$ quelconque sous la forme d'une convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2)$$

Pour bien se représenter le calcul d'une convolution, on peut tracer simultanément les courbes représentant les fonction de $x(\tau)$ et $h(t - \tau)$ à l'instant t . $h(t - \tau)$ est obtenue à partir de $h(\tau)$ après avoir effectué un changement du sens des abscisses, soit $h(-\tau)$ et une translation de t ce qui donne $h(t - \tau)$. On calcule ensuite l'intégrale du produit des deux fonctions (fig.4)

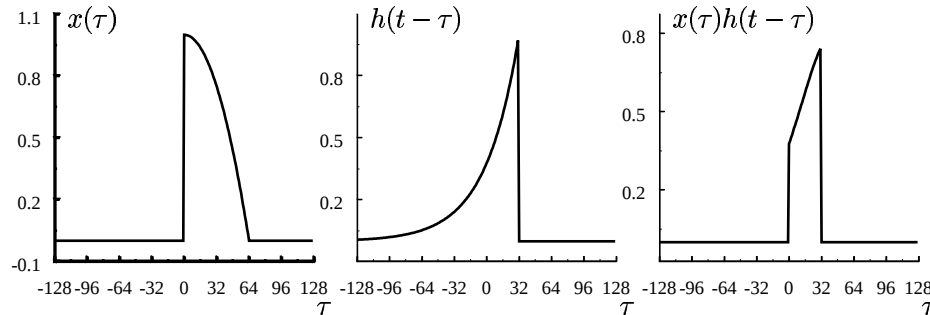


Figure 4: Illustration d'un calcul de convolution

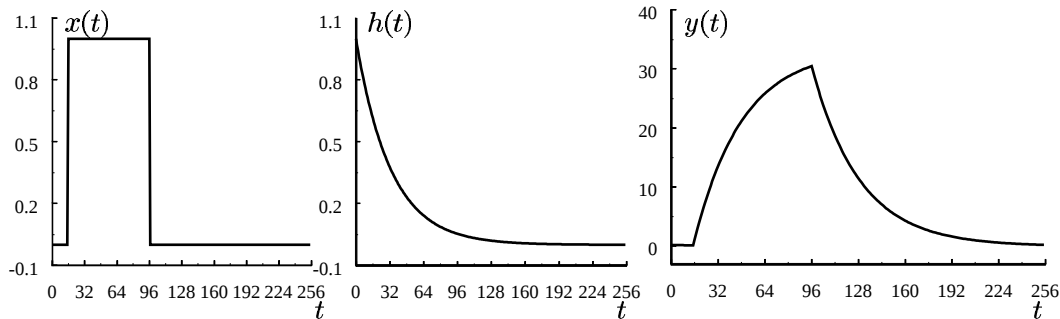


Figure 5: Transformation du signal d'entrée en forme de créneau par un système dont la réponse impulsionnelle est une exponentielle décroissante

L'écriture sous la forme d'une convolution (2) peut se justifier succinctement de la façon suivante: On décompose le signal $x(t)$ sous la forme d'une somme infinie d'impulsions de Dirac en utilisant l'eq. (1)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (3)$$

Chacune de ces impulsions décalées $\delta(t - \tau)$ engendre une sortie sous la forme d'une réponse impulsionnelle décalée $h(t - \tau)$ car on suppose que le système est invariant dans le temps. Comme le système est linéaire, la sortie obtenue lorsque l'entrée est $x(t)$ est bien donnée par la convolution (2). Notez que la convolution est une opération commutative et qu'on peut écrire (2) sous la forme

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (4)$$

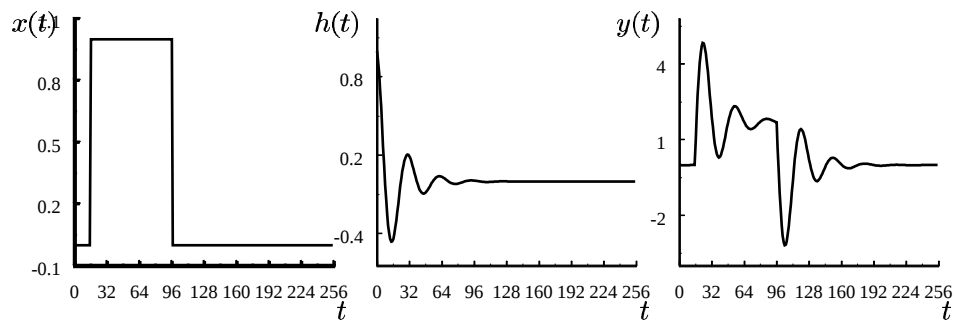


Figure 6: Transformation du signal d'entrée en forme de créneau par un système dont la réponse impulsionnelle est une exponentielle décroissante oscillante (système du deuxième ordre)

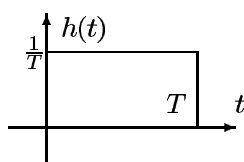


Figure 7: Réponse impulsionnelle d'un filtre calculant une moyenne

Un exemple de filtre est le calcul de la moyenne d'un signal sur une durée T (fig. 7). Dans ce cas, $h(t)$ vaut

$$\begin{aligned} t < 0 & : h(t) = 0 \\ 0 \leq t < T & : h(t) = 1/T \\ t \geq T & : h(t) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

et la sortie s'écrit

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (6)$$

Ce calcul de moyenne met en évidence les variations lentes dans le signal (fig. 8).

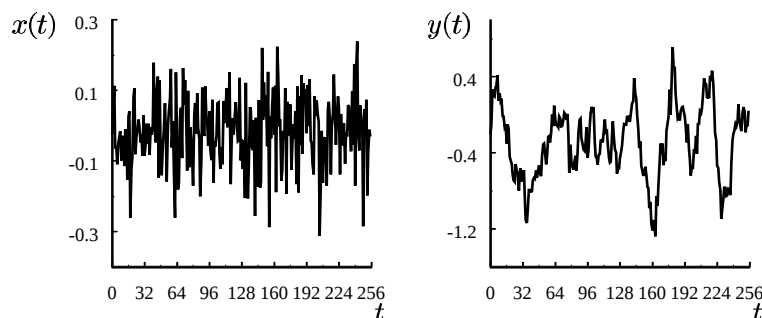


Figure 8: Transformation d'un bruit par un système calculant une moyenne sur une durée de temps égale à 16. Ce calcul de moyenne met en évidence les fluctuations lentes (les fréquences basses) et atténue les fluctuations rapides (les hautes fréquences)

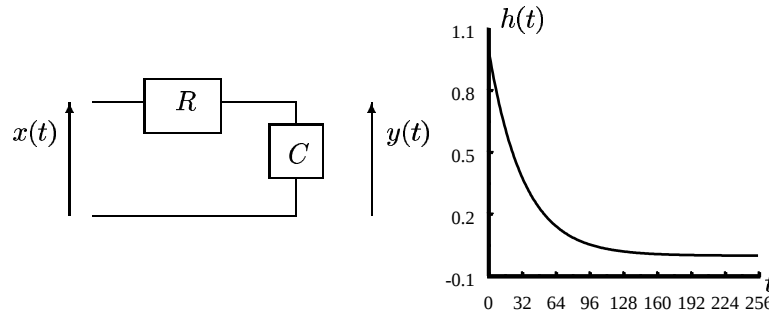


Figure 9: Exemple classique de système linéaire représenté par un filtre du premier ordre de réponse impulsionnelle de forme exponentielle $\exp -t/RC$

2.1.1 Une propriété importante des systèmes linéaires invariants dans le temps

Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence ω , soit

$$x(t) = \exp j\omega t, \quad (7)$$

la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence:

$$y(t) = A \exp j(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

Par exemple, si on émet un son sans harmoniques dans une pièce (une sinusoïde pure), ce son sera modifié mais restera un son à la même fréquence. De même, en transmission herzienne, l'émission d'une fréquence pure donnera à la réception un signal sinusoïdal à la même fréquence. En termes plus mathématiques, on dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.

2.1.2 Autres représentations des systèmes

Il existe d'autres formulations que la réponse impulsionnelle pour représenter les SLIT, par exemple sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Ainsi l'évolution d'un système du premier ordre comme la tension aux bornes d'un condensateur de capacité C (fig. 9) peut s'exprimer en utilisant la représentation

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \quad (9)$$

La réponse impulsionnelle de ce système est obtenue en appliquant à l'entrée une impulsion de Dirac. En supposant que $y(t) = 0$ pour les temps négatifs, on trouve que

$$\begin{aligned} t < 0 & : h(t) = 0 \\ t \geq 0 & : h(t) = \frac{1}{RC} \exp -t/RC \end{aligned} \quad (10)$$

La valeur du coefficient multiplicatif ($1/RC$) caractérisant l'amplitude de la réponse impulsionnelle est obtenue en remplaçant l'impulsion de Dirac par un créneau de longueur ε et de hauteur $1/\varepsilon$. On résout l'équation différentielle puis on fait tendre ε vers 0.

Si le système est au repos ($y(t) = 0$ pour $t = 0$), il est alors équivalent de résoudre l'équation différentielle ou de calculer le résultat de la convolution de l'entrée $x(t)$ par $h(t)$. Il est aussi possible de représenter les systèmes sous la forme de transformées de Fourier ou de Laplace, ce que nous verrons dans le paragraphe suivant. Ce calcul de moyenne met en évidence les fluctuations lentes (les fréquences basses) et atténue les fluctuations rapides (les hautes fréquences).

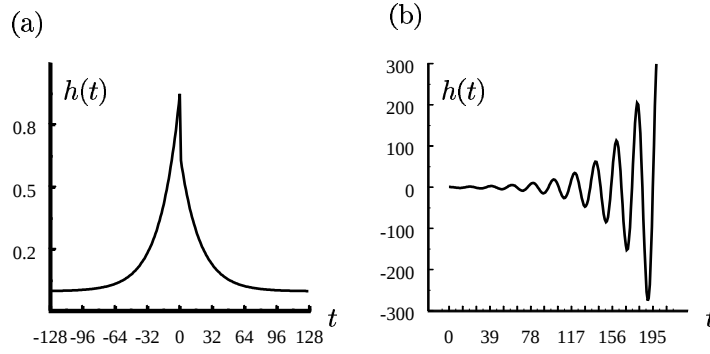


Figure 10: La réponse impulsionnelle d'un système non causal (a) est non nulle pour les temps négatifs; En général, du moins dans les cas simples, la réponse impulsionnelle d'un système instable (b) diverge.

2.1.3 Notions importantes: causalité et stabilité

Une contrainte importante pour la formalisation de nombreux problèmes est de respecter la notion de causalité (les effets ne peuvent pas précéder la cause). Dans le cas des SLIT, cette causalité se traduit par le fait que $h(t) = 0$ pour $t < 0$ (fig. 10 (a)).

Une autre notion fondamentale est la stabilité des systèmes. La définition la plus courante de cette stabilité est la suivante: on dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT (fig. 10 (b)) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < M \quad (11)$$

2.2 Représentation des signaux dans le domaine des fréquences, la transformée de Fourier

La transformée de Fourier a été développée initialement pour étudier les fonctions de durée finie, et étendue aux fonctions périodiques. Nous donnerons les résultats principaux dans ce cas, avant de donner les formules les plus utiles en traitement des signaux à temps continu. Notons aussi que la transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace, qui est plus utilisée par les automaticiens, en particulier pour caractériser plus facilement la stabilité des systèmes linéaires.

2.3 Représentation des signaux périodiques sous la forme de séries de Fourier

Un signal $x(t)$ périodique de période T_0 peut se décomposer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux, les harmoniques dont la fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale

$$\omega_0 = 2\pi/T. \quad (12)$$

Remarque: Comme dans la plupart des ouvrages anglosaxons, nous ne ferons pas la différence entre "pulsation" et fréquence, qui représentent des données identiques avec des unités différentes: les radians par seconde dans le premier cas ou le nombre de périodes ou de tours par seconde dans le second cas.)

On aura ainsi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \exp(jn\omega_0 t) \quad (13)$$

Il n'y pas d'autres composantes, en considérant que la composante continue (pour $n = 0$) fait partie des harmoniques. L'amplitude complexe de chaque harmonique $X(n\omega_0)$ se calcule de la manière

suivante

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \quad (14)$$

En admettant que l'écriture sous la forme (13) est valable, le calcul (14) donne

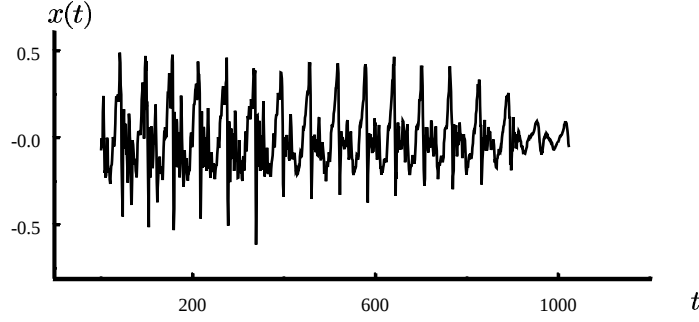


Figure 11: Représentation graphique d'un signal de parole, faisant apparaître une quasi-périodicité dans les périodes successives du signal; la durée 1000 correspond à 125 ms

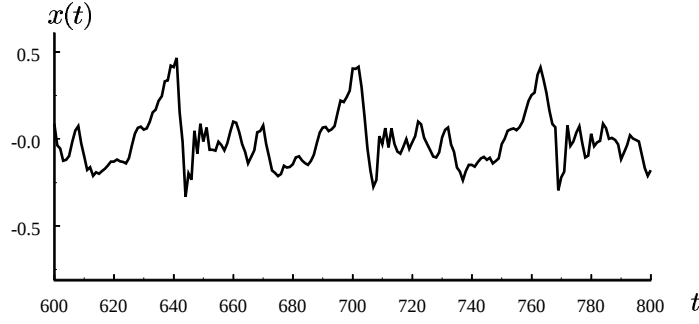


Figure 12: Grossissement d'une portion du signal précédent, une période de longueur 64 correspond à une durée de 8 ms soit à une fréquence de 125 Hz

$$X'(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\omega_0) \exp(jm\omega_0 t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \quad (15)$$

Si la commutation de la sommation et de l'intégration est possible

$$X'(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\omega_0) \int_0^{T_0} \exp[j(m-n)\omega_0 t] dt \quad (16)$$

Comme

$$\begin{aligned} m \neq n &\Rightarrow \int_0^{T_0} \exp[j(m-n)\omega_0 t] dt = 0 \\ m = n &\Rightarrow \int_0^{T_0} \exp[j(m-n)\omega_0 t] dt = T_0 \end{aligned} \quad (17)$$

on a bien, pour tout n :

$$X'(n\omega_0) = X(n\omega_0) \quad (18)$$

A l'inverse, la démonstration permettant de justifier l'écriture (13) n'est pas si directe: il faut montrer que le signal reconstitué $x'(t)$

$$x'(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_0} x(\tau) \exp jn\omega_0(t-\tau) d\tau \quad (19)$$

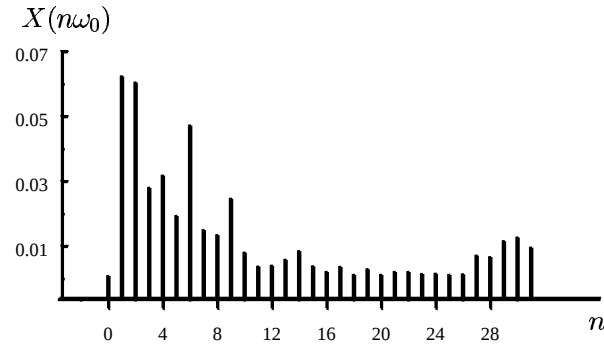


Figure 13: Amplitude des harmoniques calculées sur une période du signal de parole (les fréquences des harmoniques sont des multiples de la fréquence fondamentale qui est ici de 125 Hz. Chacune de ces harmoniques a une amplitude, mais aussi une phase dont la représentation n'est pas donnée parce qu'elle n'est pas très explicite

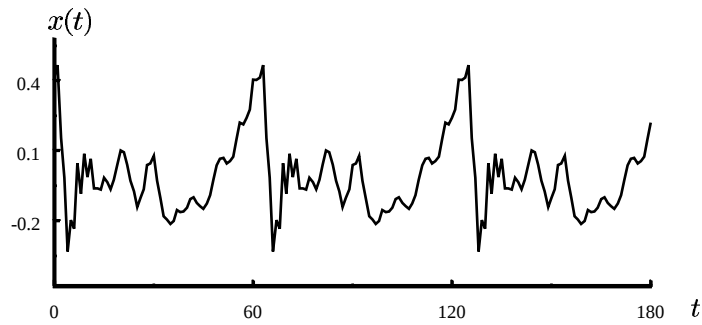


Figure 14: Reconstruction du signal utilisant toutes les 32 harmoniques visibles dans ce signal, la reconstruction du signal original est parfaite sur la première période. Les autres périodes reconstituées sont identiques à la première et donc légèrement différentes des périodes correspondantes du signal initial

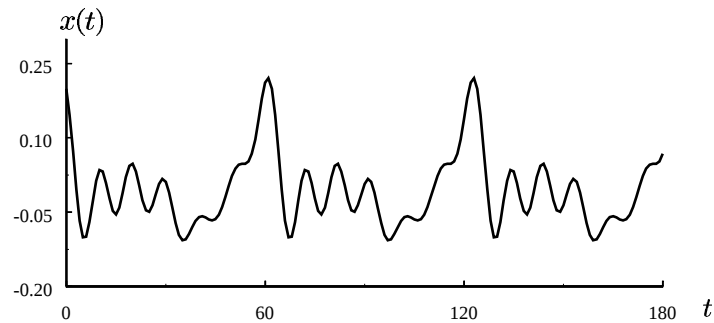


Figure 15: Reconstruction du signal n'utilisant que les 16 harmoniques de plus basse fréquences, les fluctuations rapides du signal ont disparu

$$x'(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp jn\omega_0(t - \tau) d\tau \quad (20)$$

est bien égal au signal initial $x(t)$, et donc que pour $-T_0/2 < \tau < T_0/2$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp jn\omega_0(-\tau) d\tau = \delta(\tau) \quad (21)$$

où $\delta(\tau)$ est une impulsion de Dirac. Une démonstration correcte fait appel à la théorie des distributions. Nous admettrons la validité de ce résultat.

Remarque: Nous avons systématiquement utilisé la représentation complexe qui est plus facile à manipuler que la représentation en sinus et cosinus. Ceci fait intervenir la notion de fréquences négatives qu'on peut interpréter de la manière suivante. La fréquence est associée à la vitesse de rotation d'un point se déplaçant uniformément sur le cercle de rayon unité. Une rotation dans le sens positif correspond à une fréquence positive, une rotation dans le sens négatif correspond à une fréquence négative. Un mouvement sinusoïdal réel sera la combinaison de deux mouvements en sens inverse.

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\exp j\omega t + \exp -j\omega t) \quad (22)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(\exp j\omega t - \exp -j\omega t) \quad (23)$$

2.3.1 Quelques propriétés des séries de Fourier

La plupart des propriétés importantes se retrouvent dans le cas des transformées de Fourier du paragraphe suivant. Notons toutefois que si un signal est réel,

$$X(-n\omega_0) = \overline{X(n\omega_0)} \quad (24)$$

Si de plus on a les symétries

$$\begin{aligned} x(-t) = x(t) &\Rightarrow X(n\omega_0) = \overline{X(n\omega_0)} \text{ (réel)} \\ x(-t) = -x(t) &\Rightarrow X(n\omega_0) = -\overline{X(n\omega_0)} \text{ (imaginaire pur)} \end{aligned} \quad (25)$$

Les propriétés de symétries (24) et (25) sont souvent utilisées de deux manières: soit pour réduire la quantité de calculs à effectuer soit, ce qui est parfois plus utile, pour vérifier que les calculs sont corrects et que les programmes les ont bien transcrits.

2.4 La transformée de Fourier

La décomposition en séries de Fourier peut s'étendre aux fonctions non périodiques. Dans ce cas nous aurons une décomposition sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp j\omega t d\omega \quad (26)$$

où l'amplitude complexe à la fréquence ω est donnée par

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp -j\omega t dt \quad (27)$$

Pour justifier cette décomposition, il faut montrer que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp j\omega(t - \tau) d\omega \right] d\tau \quad (28)$$

et donc que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp j\omega t d\omega = \delta(t) \quad (29)$$

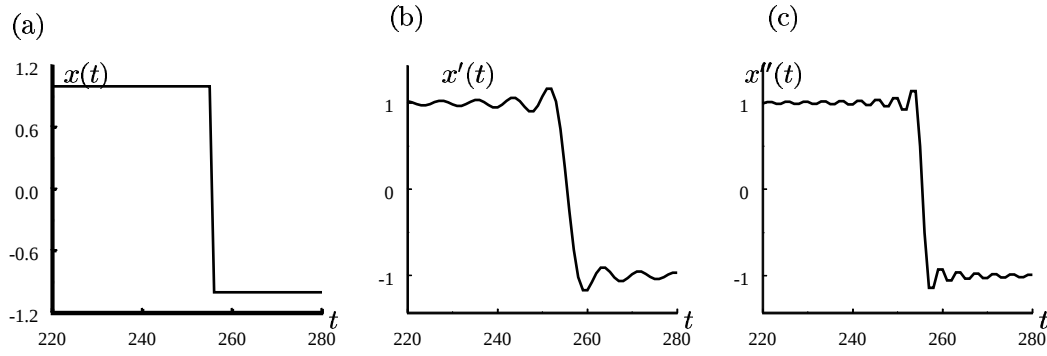


Figure 16: Reconstruction d'un signal discontinu à partir d'un nombre limité de fréquences faisant apparaître le phénomène de Gibbs (a) signal original (b) signal reconstruit avec un faible nombre de fréquences, (c) signal reconstruit avec un plus grand nombre de fréquences

La démonstration nécessite la théorie des distributions. Elle est fondée sur la propriété suivante

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp j\omega t d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp j\omega t d\omega \quad (30)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp j\omega t d\omega = \frac{\sin \Omega t}{\pi t} \quad (31)$$

On peut montrer en utilisant les propriétés des fonctions de la variable complexe que la fonction $\frac{\sin \Omega t}{\pi t}$ vérifie

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\pi t} dt = 1 \quad (32)$$

De plus,

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\pi t} dt = 1 \quad (33)$$

et on en déduit que

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin \Omega t}{\pi t} dt = x(0) \quad (34)$$

ce qui est la caractérisation de la distribution de Dirac. L'éq. (29) montre que la distribution de Dirac a pour transformée de Fourier la fonction constante et égale à l'unité.

On notera que si une fonction est discontinue (mais continue par morceaux, comme un créneau) alors le module de sa transformée de Fourier décroît comme ω^{-1} , si elle est continue, il décroît comme ω^{-2} , si elle est dérivable, il décroît comme ω^{-3} . Si la décroissance est en ω^{-2} ou plus rapide, le calcul de la transformée de Fourier inverse ne pose pas de difficultés liées à la convergence des intégrales, mais il faut prendre quelques précautions dans le premier cas (décroissance en ω^{-1} .)

En particulier, si un signal est discontinu et qu'on cherche à le reconstruire par transformée de Fourier inverse en utilisant un domaine de fréquences limité, cette reconstruction fera apparaître au voisinage de la discontinuité des oscillations dont l'amplitude n'est pas négligeable (phénomène de Gibbs illustré par la figure 16). Un phénomène du même type peut apparaître lorsque un signal discontinu est échantillonné et qu'on lui applique un retard d'un demi-échantillon, réalisé dans le domaine des fréquences par un déphasage linéaire de la forme $\exp(j\omega T_e/2)$.

2.5 Quelques propriétés de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier des signaux réels a les mêmes propriétés que les séries de Fourier (eq. 24-25). Voici quelques propriétés supplémentaires couramment utilisées.

2.5.1 Translation dans le domaine temporel

Soit la fonction $x_\tau(t)$

$$x_\tau(t) = x(t - \tau) \quad (35)$$

Sa transformée de Fourier est

$$X_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \exp -j\omega t dt \quad (36)$$

En effectuant le changement de variable $u = t - \tau$

$$X_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \exp -j\omega(u + \tau) du = \exp -j\omega\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \exp -j\omega u du \quad (37)$$

$$X_\tau(\omega) = \exp -j\omega\tau X(\omega) \quad (38)$$

La translation dans le domaine temporel se traduit par un terme correspondant à un déphasage linéaire en fonction de la fréquence ($\exp -j\omega\tau$). Cette opération ne modifie pas le module de la transformée de Fourier.

2.5.2 Multiplication par une sinusoïde, translation en fréquence

Comme la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse ont la même forme, on a la propriété identique dans le domaine fréquentiel: le signal

$$x_{\omega_0} = x(t) \exp j\omega_0 t \quad (39)$$

a pour transformée de Fourier

$$X_{\omega_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp -j(\omega - \omega_0)t dt \quad (40)$$

$$X_{\omega_0}(\omega) = X(\omega - \omega_0) \quad (41)$$

Cette propriété est fondamentale pour l'interprétation de la modulation des signaux en télécommunications.

De manière à transmettre simultanément plusieurs signaux, $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$, on leur applique l'opération de modulation (39), en choisissant pour chacun des trois signaux des fréquences porteuses différentes, ω_a , ω_b et ω_c . Dans le domaine des fréquences, le récepteur reçoit la somme des trois signaux,

$$Y(\omega) = X_a(\omega - \omega_a) + X_b(\omega - \omega_b) + X_c(\omega - \omega_c) \quad (42)$$

Pour retrouver un des signaux, par exemple $x_b(t)$ il doit réaliser l'opération inverse de la modulation (39), la démodulation

$$Y_b(\omega) = X_a(\omega - \omega_a + \omega_b) + X_b(\omega - \omega_b + \omega_b) + X_c(\omega - \omega_c + \omega_b) \quad (43)$$

et éliminer, par filtrage, les composantes indésirables $X_a(\omega - \omega_a + \omega_b)$ et $X_c(\omega - \omega_c + \omega_b)$, ce qui permet de retrouver $X_b(\omega)$, soit, dans le domaine temporel, le signal émis $x_b(t)$. Un exemple est donné par la figure 17.

2.5.3 Transformée de Fourier d'une convolution

Soit

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (44)$$

qui a pour transformée de Fourier

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] \exp -j\omega t dt \quad (45)$$

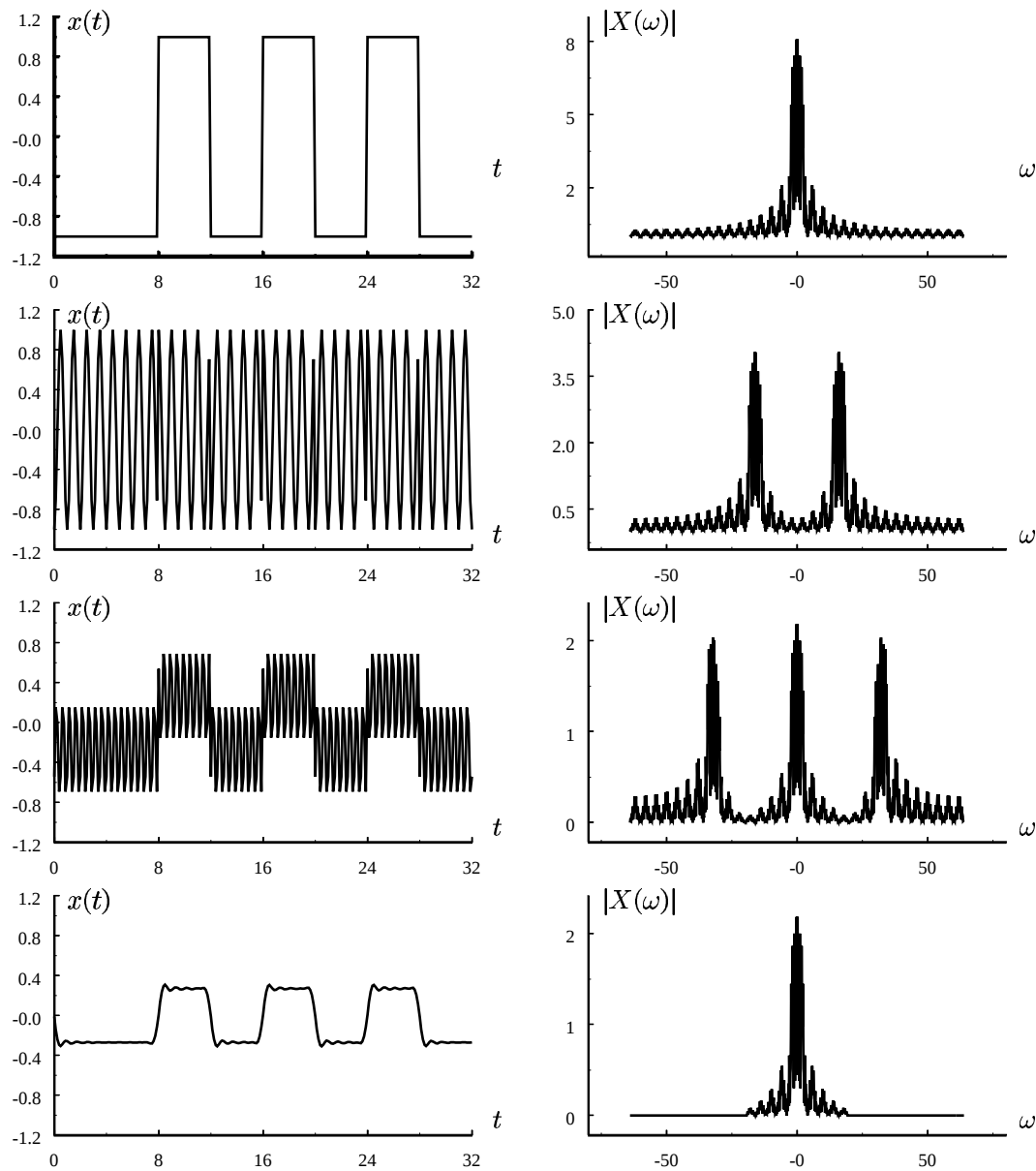


Figure 17: Illustration des effets d'une modulation d'amplitude dans le domaine temporel (colonne de gauche) et dans le domaine des fréquence (colonne de droite). De haut en bas: signal avant modulation; signal après modulation par une porteuse $\cos \omega_0 t$ (on remarque la translation dans les fréquences positives et la translation dans les fréquences négatives car on module par un signal réel); multiplication du signal modulé à la réception par la porteuse qui peut être déphasée par rapport à la fréquence porteuse à l'émission (on remarque un dédoublement et une translation des deux composantes dans le domaine des fréquences, deux de ces quatre composantes sont identiques et se superposent dans le domaine des basses fréquences, le signal utile est cette composante basse fréquence; enfin signal filtré passe bas éliminant les composantes hautes fréquences

En supposant qu'il est possible de changer l'ordre des intégrations

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \exp -j\omega t dt \right] d\tau \quad (46)$$

et en introduisant artificiellement

$$1 = \exp j\omega\tau \exp -j\omega\tau \quad (47)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp -j\omega\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \exp -j\omega t \exp j\omega\tau dt \right] d\tau \quad (48)$$

ou bien en effectuant le changement de variable $t - \tau = u$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp -j\omega\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \exp -j\omega u du \right] d\tau \quad (49)$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp -j\omega\tau d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \exp -j\omega u du \right] \quad (50)$$

On y reconnaît les transformées de Fourier $X(\omega)$ et $H(\omega)$ des fonctions $x(t)$ et $h(t)$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (51)$$

La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est un produit des transformées de Fourier de ces deux fonctions. Ce résultat est un des résultats les plus importants en traitement du signal aussi bien dans les aspects théoriques que dans les applications.

2.5.4 Transformée de Fourier d'un produit de fonctions

La transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse ont des formulations identiques à une constante et un changement de signe près. Par conséquent la transformée d'un produit de fonctions dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine des fréquences:

$$y(t) = x(t)h(t) \quad (52)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (53)$$

En écrivant $x(t)$ comme une transformée de Fourier inverse

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \exp(j\nu t) d\nu \right] h(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (54)$$

En admettant qu'on peut changer l'ordre des intégrations

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp[-j(\omega - \nu)t] dt \right] d\nu \quad (55)$$

où on reconnaît la transformée $H(\omega - \nu)$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) H(\omega - \nu) d\nu \quad (56)$$

Un cas particulier important de ce résultat, la modulation des signaux a été vu au paragraphe 2.5.2. Nous en verrons une autre application dans le chapitre trois consacré à l'échantillonnage.

2.5.5 Conservation de l'énergie, théorème de Parseval

On définit l'énergie d'un signal comme l'intégrale du carré de son module

$$E(|x|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{x(t)} dt \quad (57)$$

On peut appliquer le résultat sur la transformée de Fourier d'une convolution au cas où

$$h(t) = \overline{x(-t)}. \quad (58)$$

Dans ce cas la sortie du filtre, $r(t)$ est appelée "*autocorrélation* de $x(t)$ "

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \overline{x(-t + \tau)} d\tau \quad (59)$$

En posant $u = t + \tau$, on remarque que $r(-t)$ s'écrit

$$r(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \overline{x(t + \tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t + u) \overline{x(u)} du = r(t) \quad (60)$$

Cette fonction d'autocorrélation est une fonction paire de t . On peut montrer, en utilisant l'inégalité de Schwarz, qu'elle présente un maximum à l'origine. Comme la transformée de Fourier de $x(-t)$ vaut $\overline{X(\omega)}$, on a

$$Y(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (61)$$

$E(|x|^2)$ est la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation, elle peut se calculer en utilisant la transformée de Fourier inverse

$$E(|x|^2) = r(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (62)$$

A une constante $1/2\pi$ près, l'énergie du signal peut se calculer aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel.

2.5.6 Représentation simultanée des transformées de Fourier des signaux périodiques et des signaux quelconques

On peut être amené à représenter simultanément les transformées de Fourier de signaux périodiques et de signaux quelconques, par exemple dans le cas de l'analyse d'un signal musical enregistré en présence d'un bruit de fond. Dans ce cas nous représenterons la transformée de Fourier des signaux périodiques sous la forme d'une suite d'impulsions de Dirac aux fréquences ω_k multipliées par une amplitude $X(\omega_k)/2\pi$.

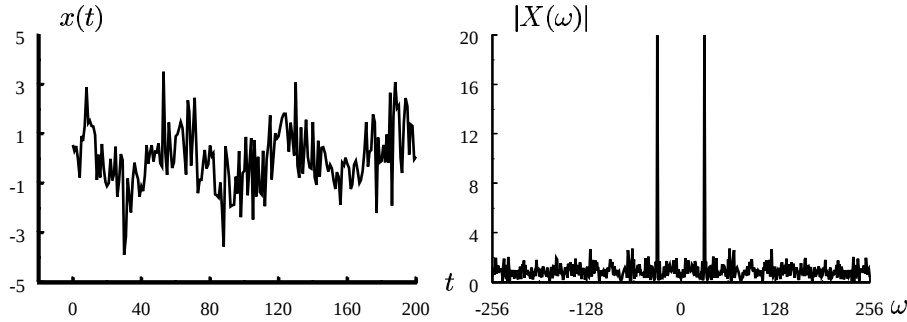


Figure 18: Analyse spectrale d'un signal composé d'un signal non périodique et d'une fréquence pure: la composante périodique apparaît comme une impulsion dans le domaine des fréquences

3 L'échantillonnage des signaux

Le traitement numérique des signaux se fait sur des valeurs discrètes: il n'est pas possible de traiter par ordinateur des signaux à temps continu. Par souci de simplicité, on échantillonne les signaux à un rythme régulier. Une horloge de cadence T permet de conserver entre les instants nT et $(n+1)T$ la valeur qu'avait le signal à l'instant nT (fig 19), ce qui permet ensuite de calculer la valeur numérique binaire du signal par une succession d'opérations de comparaisons à des tensions de référence de la forme $v_0 2^{-k}$ et de soustractions.

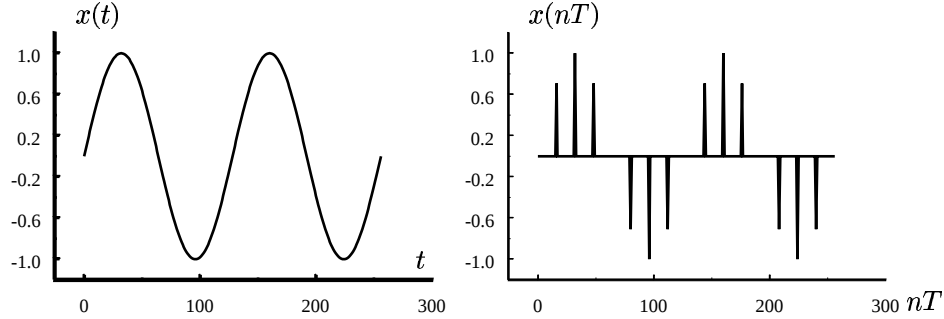


Figure 19: Illustration de l'échantillonnage d'un signal : on mesure la valeur du signal à des instants qui sont des multiples de la période d'échantillonnage

On conçoit bien que si le signal à analyser ne varie pas trop rapidement, et que si la cadence d'échantillonnage est suffisamment élevée, on pourra retrouver l'information du signal original dans le signal échantillonné. Mais il est nécessaire de traduire ceci de manière un peu plus formelle, ce qui nous conduira à établir le théorème de Nyquist (ou de Shannon) donnant le lien entre la bande de fréquence occupée par le signal et la cadence d'échantillonnage. Une manière raisonnable de considérer ce problème est de trouver les conditions pour lesquelles il est possible de reconstituer le signal à temps continu à partir des échantillons mémorisés. Ce développement se fait simplement en utilisant une interprétation dans le domaine des fréquences. Nous verrons donc dans quelles conditions, le signal échantillonné permet de retrouver le signal initial et la manière de reconstruire ce signal initial par interpolation entre les échantillons.

Quelques remarques La représentation graphique d'un signal échantillonné ressemble à celle du signal continu lorsque le signal est dans le domaine des basses fréquences. Toutefois, pour les fréquences élevées, le signal échantillonné ne présente guère de similitude avec le signal original (cf fig. illustrechan2).

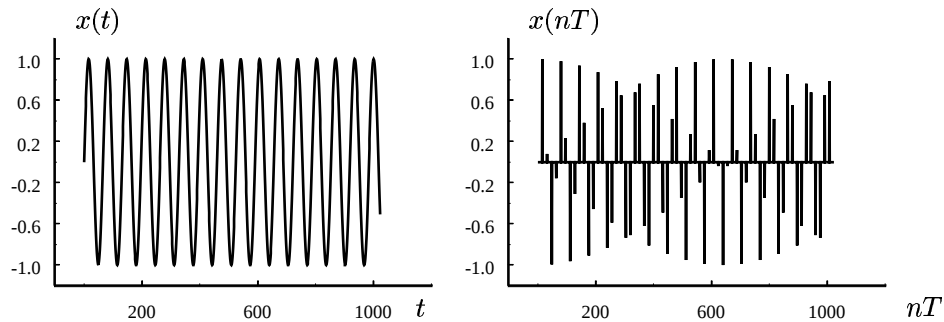


Figure 20: La version échantillonnée d'une sinusoïde dont la fréquence est proche de la moitié de la fréquence d'échantillonnage ne ressemble pas au signal à temps continu initial

Les précurseurs de l'invention de l'échantillonnage et du développement de la théorie correspondantes sont les inventeurs qui se sont intéressés à l'analyse du mouvement au dix-neuvième siècle: les créateurs du stroboscope (Plateau en Belgique et Von Stamper en Autriche en 1829); puis ceux

du “chronoscope”, un système de prises de vues rapides permettant l’analyse du mouvement, (Muybridge aux USA et Marey en France, vers 1870). Les premières reconstructions de séquences d’images animées sont fondées sur la permanence rétinienne (une image se conserve environ 1/10ième de seconde) découverte par Plateau et effectivement utilisée dans le stroboscope puis le cinématographe (les frères Lumière en 1895). De nombreux sites “web” présentent les résultats obtenus par ces inventeurs. La formulation mathématique des bonnes conditions d’échantillonnage a été proposée à H. Nyquist en 1928 puis reprise par C. Shannon en 1948, spécialistes des communications des Bell’s labs.

Les résultats fondamentaux sur l’échantillonnage sont bien illustrés par l’effet stroboscopique de ralenti ou même de changement de sens de rotation lors de la visualisation d’une roue filmée à 25 images par seconde.

3.1 Interprétation de l’échantillonnage dans le domaine des fréquences

L’opération d’échantillonnage consiste à mesurer la valeur du signal $x(t)$ à un instant donné (par exemple pour $t = 0$), ce qui peut se formaliser en utilisant la distribution de Dirac

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt \quad (63)$$

De même, la mesure à l’instant nT_e s’écrit

$$x(nT_e) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_e)dt \quad (64)$$

On peut interpréter l’échantillonnage comme une séquence d’impulsions de Dirac modulées en amplitude par le signal $x(t)$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) \quad (65)$$

ou encore sous la forme d’un produit que nous noterons

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \\ &= x(t)s(t) \end{aligned} \quad (66)$$

Remarque importante: Pour interpréter correctement l’échantillonnage et la reconstruction du signal à temps continu $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$, il faut bien se représenter le signal échantillonné comme cette suite d’impulsions modulées en amplitude séparées par des périodes où le signal est nul, et non sous la forme de crêneaux d’amplitude constante $x(nT_e)$ entre les instants d’échantillonnage, qui est le résultat de l’application d’un bloqueur au signal échantillonné. Cette erreur d’interprétation peut être la source d’une mauvaise compréhension, assez courante chez certains spécialistes du traitement d’images.

La représentation (66) est un produit dans le domaine temporel. Elle se traduit donc sous la forme d’une convolution dans le domaine des fréquences. La distribution $s(t)$ est un “peigne” d’impulsions de Dirac régulièrement espacées. Elle admet une transformée de Fourier, $S(\omega)$ qui est elle aussi un peigne d’impulsions de Dirac régulièrement espacées, l’écart entre les harmoniques étant $\omega_e = 2\pi/T_e$

$$S(\omega) = K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_e) \quad (67)$$

(Le coefficient de normalisation K qui peut être pris égal à T_e^2 pour garantir la conservation de la puissance dans le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel n’a pas de conséquences dans l’interprétation fréquentielle de l’échantillonnage.) La transformée d’un produit dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine des fréquences. On a donc

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu)S(\nu)d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) \left[K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\omega_e) \right] d\nu \end{aligned} \quad (68)$$

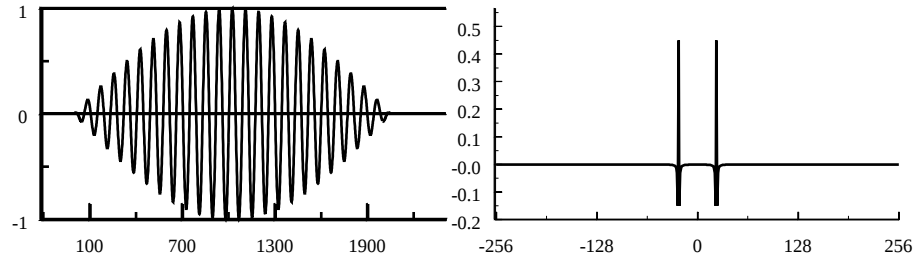
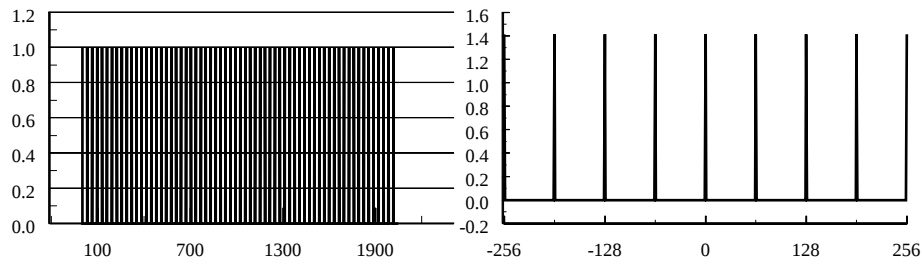
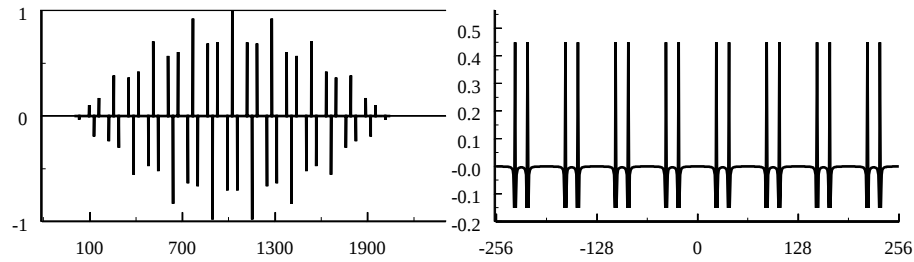
Signal à temps continu $x(t)$ $X(\omega)$, Transformée de Fourier de $x(t)$ Fonction d'échantillonnage $s(t)$ $S(\omega)$, Transformée de Fourier de $s(t)$ Signal échantillonné $y(t)$ $Y(\omega)$, Transformée de Fourier de $y(t)$

Figure 21: Interprétation de l'échantillonnage dans le domaine temporel et dans le domaine des fréquences: Le signal à temps continu occupe ici une bande de fréquence limitée; Dans le domaine temporel, l'opération d'échantillonnage est un produit par une fonction peigne; la transformée de Fourier de cette fonction peigne est une fonction peigne dans le domaine des fréquences; l'opération d'échantillonnage qui est un produit dans le domaine temporel se traduit par un produit de convolution dans le domaine des fréquences (la fréquence d'échantillonnage 2π correspond à la fréquence 64)

La convolution $Y_k(\omega)$ d'une fonction $X(\omega)$ par une impulsion de Dirac décalée en $k\omega_e$ se traduit par une translation de $k\omega_e$

$$Y_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) \delta(\nu - k\omega_e) d\nu = X(\omega - k\omega_e) \quad (69)$$

Pour obtenir $Y(\omega)$, on effectue la somme du résultat des convolutions de $X(\omega)$ par les différentes impulsions $\delta(\omega - k\omega_e)$, on en déduit donc

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e) \quad (70)$$

La transformée de Fourier du signal échantillonné s'obtient par addition de reproductions de la transformée de Fourier du signal original identiques en forme mais décalées les unes des autres de ω_e . C'est donc une fonction périodique de la fréquence de période ω_e .

3.2 Reconstruction du signal à temps continu à partir des échantillons

L'opération d'addition des reproductions décalées de la transformée de Fourier n'est pas, en général une opération réversible: supposons par exemple que le signal à temps continu $x(t)$ est réel et a une composante non nulle aux fréquences $\omega_e/2$ et $-\omega_e/2$. On aura $X(-\omega_e/2) = X(\omega_e/2)$. Lors de l'échantillonnage, on additionnera les répliques décalées de ces composantes, si bien que le résultat sera nécessairement une composante réelle en $Y(-\omega_e/2)$ et $Y(\omega_e/2)$: l'information sur la partie imaginaire de $X(\omega_e/2)$ sera perdue.

Pour reconstituer un signal à temps continu à partir de ses échantillons, il faut que le signal continu avant échantillonnage respecte certaines contraintes

- Il ne faut pas qu'une composante à une fréquence ω du signal échantillonné provienne de plusieurs composantes du signal à temps continu (du fait de l'addition des répliques de la transformée de Fourier du signal à temps continu).

- Il faut, pour chaque composante du signal échantillonné, connaître la bande de fréquence de largeur ω_e dont elle était originaire dans le signal à temps continu.

La contrainte la plus naturelle qu'on peut imposer au signal (réel) à temps continu et qui satisfait ces conditions est de le limiter en fréquence par un filtrage linéaire pour s'assurer que sa transformée de Fourier est nulle en dehors de la bande de fréquences $]-\omega_e/2, \omega_e/2[$ (Théorème de Shannon: la bande de fréquence occupée par un signal *réel* doit être inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage). Dans ce cas, les répliques de $X(\omega)$ ne se chevauchent pas et on connaît la bande de fréquence initiale du signal $x(t)$.

Dans le cas des signaux complexes, il n'y a pas nécessairement symétrie de l'amplitude des composantes pour les fréquences positives ou négatives. Dans ce cas la reconstruction correcte suppose que la bande de fréquence (incluant les fréquences positives et négatives) occupée par le signal soit inférieure à la fréquence d'échantillonnage.

La fréquence d'échantillonnage doit ainsi être adaptée à la bande de fréquence occupée par le signal: il apparaît que le signal vocal est clairement intelligible si on le réduit à une bande de fréquence de 0 à 4 kHz. En conséquence, la parole en téléphonie numérique est échantillonnée à 8 kHz. L'oreille peut être sensible aux sons jusqu'à 20 kHz, ce qui amène les systèmes numériques de transmission et de mémorisation de son haute fidélité à échantillonner les signaux à 44.1 kHz. Le débit de prise de vues au cinéma est de 24 images par seconde et de 25 images par seconde en vidéo. Un signal vidéo SECAM (pour la luminance seulement) est composé de 576 lignes de 720 échantillons (ou pixels) par trame (par image).

Remarque L'échantillonnage peut être interprété comme une modulation du signal analogique par différentes porteuses aux fréquences multiples de la fréquence d'échantillonnage. On peut dans certaines applications utiliser cette remarque pour moduler et démoduler des signaux en transmission numérique.

3.2.1 Reconstruction idéale

Si les hypothèses d'application du théorème de Shannon sont vérifiées, il y a une relation bijective entre les composantes du signal à temps continu et celles du signal échantillonné qui sont dans la

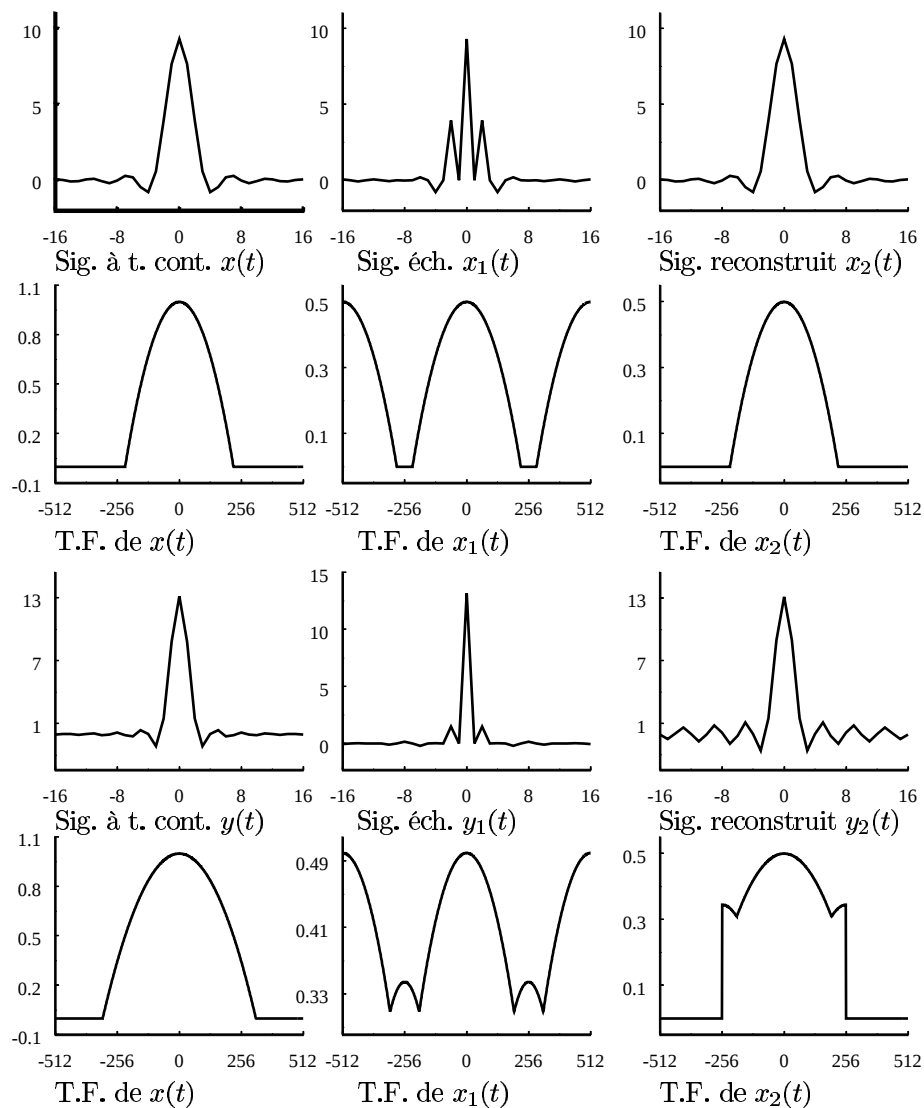


Figure 22: Interprétation de la reconstruction des signaux dans le domaine temporel et dans le domaine des fréquences: Les signaux à temps continu occupent ici une bande de fréquence limitée mais différente; le premier $x(t)$ vérifie les conditions de Shannon: il ne présente pas de repliement spectral lors de l'échantillonnage et la reconstruction est correcte. Le second $y(t)$ a une bande passante plus large que la moitié de la fréquence d'échantillonnage: la reconstruction par filtrage passe-bas du signal échantillonné ne redonne pas le signal original

bande $]-\omega_e/2, \omega_e/2[$ et on connaît la bande de fréquences du signal original. Pour reconstituer $x(t)$, il suffit de filtrer le signal échantillonné, $y(t)$, par un filtre $H(\omega)$ dont la réponse en fréquence est constante et vaut $2\pi/\omega_e$ dans la bande $]-\omega_e/2, \omega_e/2[$, et vaut zéro en dehors de cette bande. La réponse impulsionnelle de ce filtre s'obtient par transformée de Fourier inverse du créneau;

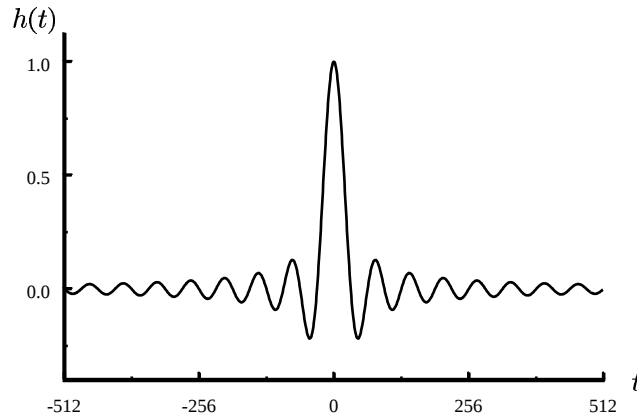


Figure 23: Fonction d'interpolation idéale de la forme $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ pour la reconstruction d'un signal à temps continu à partir de ses échantillons

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \frac{2\pi}{\omega_e} \exp(j\omega t) d\omega \quad (71)$$

$$h(t) = \frac{\exp(j\omega_e t/2) - \exp(-j\omega_e t/2)}{jt\omega_e} = \frac{\sin \omega_e t/2}{\omega_e t/2} \quad (72)$$

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T_e)}{\pi t/T_e} \quad (73)$$

Cette réponse impulsionnelle n'est pas causale et elle tend relativement lentement vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Son utilisation pratique ne peut être que rarement envisagée: il faut accepter un retard conséquent dans la reconstruction du signal à temps continu, et effectuer une quantité de calculs importante du fait de la lenteur de la convergence.

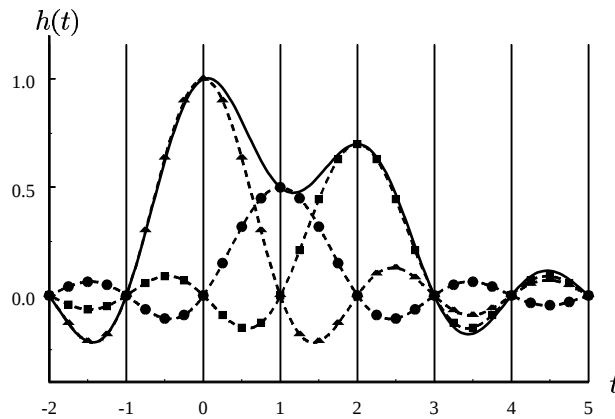


Figure 24: Reconstruction d'un signal à partir de trois échantillons en utilisant le filtre idéal; on remarque qu'aux instants d'échantillonnage une seule des composantes de la somme est non nul: le signal reconstruit prend bien pour valeurs des échantillons à ces instants

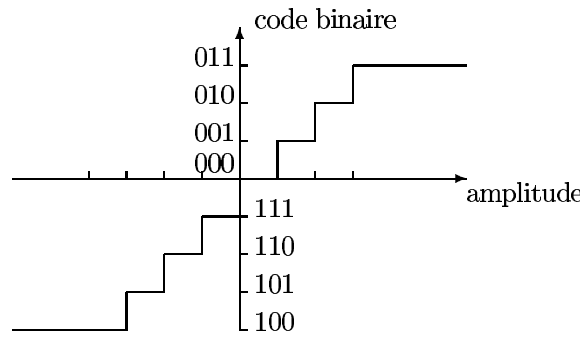


Figure 25: Fonction de quantification d'un convertisseur à trois bits

3.2.2 Reconstruction effective des signaux à temps continu

S'il est possible de retarder le signal d'une durée D lors de la reconstitution, on peut tenter d'approximer la réponse impulsionnelle $h(t)$ en utilisant un filtre passe bas causal dont la réponse en fréquence est aussi proche que possible de $H(\omega) \exp(-j\omega D)$. Il est parfois suffisant de se contenter d'un simple blocage du signal à la sortie du convertisseur numérique/analogique et d'appliquer à ce signal bloqué (qui est une suite d'échelons) un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Cependant, cette méthode simple ne permet pas de reconstruire les composantes de fréquence élevée, proche de $\omega_e/2$. On peut aussi effectuer une interpolation linéaire entre les échantillons, ce qui nécessite de retarder le signal reconstruit. Cette méthode distord un peu moins le signal que la méthode précédente, mais là encore la reconstruction est loin d'être parfaite. Les fréquences dans le voisinage de la moitié de la fréquence d'échantillonnage sont mal reconstituées et il y a encore des composantes parasites au-delà de la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Un bon compromis dans la reconstruction est d'accepter de retarder le signal à reconstituer d'une durée L et d'interpoler les signaux avec un fonction $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ tronquée entre $-L$ et $+L$ et retardée de L . La qualité de la reconstruction dépendra alors de la valeur de L . Plus L sera grand, meilleure sera la reconstruction.

3.3 La quantification des signaux

Pour effectuer un traitement numérique, il est nécessaire que les signaux soient représentés par un nombre fini de données binaires: Cette contrainte impose non seulement l'échantillonnage des signaux, mais aussi la quantification des valeurs mesurées après échantillonnage.

(Il arrive, en téléphonie par exemple, qu'avant quantification, le signal subisse un prétraitement : on le multiplie par un gain fonction logarithmique de son amplitude, de manière à diminuer la dynamique des données à traiter ou à transmettre.)

Les données sont initialement numérisées en "virgule fixe", avec en général une représentation du signe en complément à deux (cf. fig. 25.) La précision des données au moment de l'échantillonnage est de l'ordre de 2^{-8} en téléphonie ou en codage d'image à 2^{-14} , rarement plus du fait des bruits perturbant les mesures. On obtient l'ordre de grandeur du bruit de quantification de la manière suivante. La fonction de quantification est une fonction en escalier (fig. 25). Nommons q le pas de quantification. Supposons que l'erreur de quantification soit centrée (ce qui peut s'obtenir en soustrayant une constante $q/2$ au signal avant échantillonnage). L'amplitude de l'erreur de quantification en fonction de l'amplitude du signal initial est une fonction en dents de scie (fig. 26.) On suppose que l'erreur de quantification est équirépartie dans l'intervalle $] -q/2, q/2[$, sa densité de probabilité $p(b)$ valant $1/q$. La variance de l'erreur de quantification est

$$E(b^2) = \int_{-q/2}^{q/2} b^2 p(b) db = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} b^2 db = \frac{q^2}{12} \quad (74)$$

L'écart-type correspondant est

$$\sqrt{E(b^2)} = \frac{q}{\sqrt{12}} \approx 0.29q \quad (75)$$

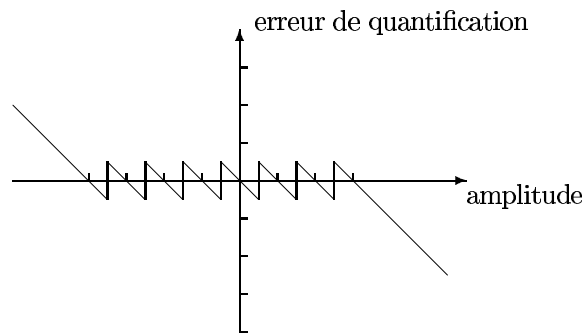


Figure 26: Erreur de quantification d'un convertisseur à trois bits, après centrage du signal initial

Dès que cela est possible, on effectue les traitements numériques en “flottant” pour éviter les problèmes de débordement. La précision relative des résultats de calculs est donnée par la taille de la mantisse. Par exemple, si la mémorisation se fait sur 64 bits, la mantisse (signe compris) pourra être codée sur 48 bits ce qui correspond à une précision de 2^{-48} , soit de l'ordre de 10^{-15} . Notons aussi que l'addition ou la soustraction de deux nombres d'amplitudes très différentes donne un résultat imprécis. Il est toujours utile d'avoir une idée de l'ordre de grandeur des données qu'on traite dans un programme ainsi que de la précision qu'on envisage sur les résultats.

4 La représentation des signaux échantillonnés et des filtres numériques, la transformée en z

L'étude des signaux échantillonnés utilise intensivement un outil mathématique efficace pour la représentation des séries temporelles. C'est la transformée en z , qui est tout-à-fait analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser. Il permet l'interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences.

4.1 Définition de la transformée en z

Dans la suite nous supposons que le pas d'échantillonnage T_e est égal à un.

La "transformée en z *bilatérale* $X(z)$ d'un signal échantillonné $x(t)$ est

$$X(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)z^{-t} \quad (76)$$

où z est une variable complexe. C'est la somme d'une série temporelle qui n'est définie que pour certaines valeurs de z . Elle ne sera en général définie que pour les valeurs de z à l'intérieur d'un domaine où la série (76) converge, en général d'une couronne de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 .

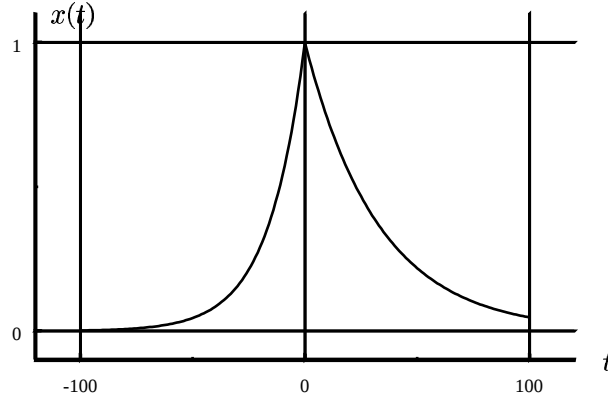


Figure 27: Exemple de fonction simple pour un calcul de transformée en z par calcul de série géométrique

Exemple: Soit le signal $x(t)$ représenté sur la figure 27

$$\begin{aligned} t \leq 0 & : x(t) = b^{-t} \\ t \geq 0 & : x(t) = a^t \end{aligned} \quad (77)$$

où a et b sont deux nombres complexes de module inférieur à un. $X(z)$ s'obtient par sommation de deux séries géométriques et vaut

$$X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} + \sum_{t=0}^{-\infty} b^{-t} z^{-t} - 1 \quad (78)$$

Elle n'est définie que si ces séries convergent. La première série converge si $|a| < |z|$. La seconde série ne converge que si $|z| < 1/|b|$. La couronne de convergence dans le plan complexe est comprise entre les cercles de rayon $|a|$ et $1/|b|$.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz} - 1 \quad (79)$$

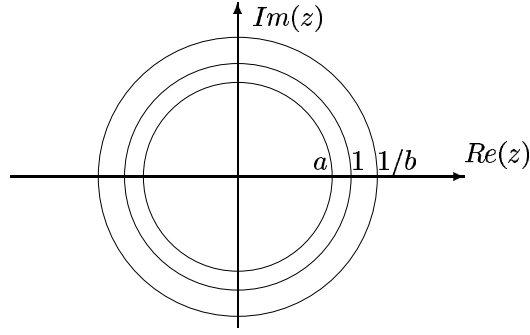


Figure 28: Domaine de convergence de $X(z)$: c'est la couronne comprise entre les cercles de rayon a et $1/b$; dans la plupart des applications en traitement du signal, ce domaine contient le cercle de rayon 1

La plupart du temps, les expressions des transformées en z utilisées en traitement du signal sont des fractions rationnelles de la variable z . On appelle “*pôles*” les racines du dénominateur de la transformée et “*zéros*” les racines de son numérateur. Dans de nombreux calculs, les pôles sont simples. Il est alors possible d'écrire les transformées sous la forme d'une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle. La transformée s'écrit alors sous la forme d'une somme de fractions dont le dénominateur est de degré un dans le cas des fonctions à coefficients complexes et de degré deux dans le cas des fonctions à coefficients réels. Ce qui permet de retrouver la plupart des transformées simples. L'exemple le plus courant de transformée utilisée en traitement du signal est la transformée de la fonction $x(t)$ nulle pour $t < 0$ et valant

$$x(t) = a^t \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (80)$$

pour $t \geq 0$, a étant un réel positif inférieur à un. Dans ce cas, $X(z)$ est définie à l'extérieur du

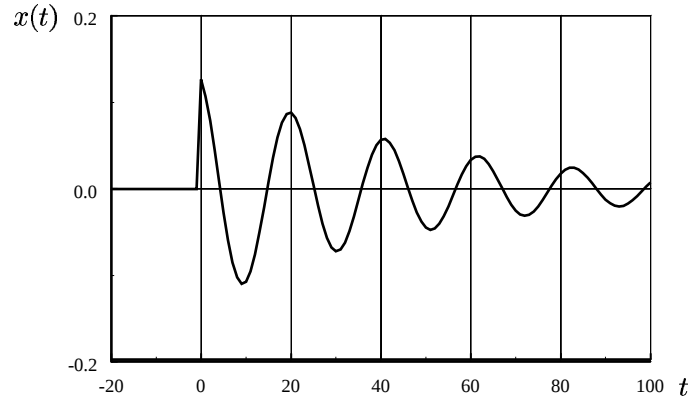


Figure 29: Une fonction couramment utilisées en traitement du signal, la sinusoïde amortie

disque de rayon $|a|$ et vaut

$$X(z) = \frac{\cos(\varphi) - az^{-1} \cos(\omega_0 - \varphi)}{1 - 2a \cos(\omega_0)z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (81)$$

Remarques : La plupart du temps le domaine de convergence de la transformée en z est une couronne qui contient le cercle de rayon un, les fonctions étudiées tendant souvent vers zéro comme une fonction exponentielle lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

Le choix de la variable z^{-1} et non z , est cohérent avec la définition de la transformée de Fourier. Cet opérateur représente le retard d'un échantillon. Il incite souvent à écrire les transformées des signaux causaux (nuls pour les valeurs négatives de t) en fonction de z^{-1} et non de z . Lorsque le signal est non causal (lorsqu'il a des composantes pour $t < 0$, on écrit souvent ces composantes

en fonction de la variable z . Cependant, la notion de causalité est contenue dans le domaine de convergence et non dans la formule donnant la transformée en z qui peut s'écrire aussi bien en fonction de la variable z que de la variable z^{-1} .

4.2 Propriétés de la transformée en z

4.2.1 Linéarité

Notons que la transformée en z est une opération linéaire.

4.2.2 Rayons de convergence

Si $x(t)$ est causal (nul pour les temps négatifs), le rayon extérieur, r_2 est infini.

Si $x(t)$ est non causal (nul pour les temps positifs et en zéro), $r_1 = 0$.

Si $x(t)$ est non nul pour un nombre fini d'échantillons, r_1 est nul et r_2 est infini. $X(z)$ est défini dans tout le plan complexe.

4.2.3 Décalage des signaux

L'avance d'un signal de k échantillons correspond à une multiplication de $X(z)$ par z^k . Le retard de k échantillons se traduit par une multiplication de $X(z)$ par z^{-k} .

En particulier si $x(t)$ est composé d'un seul échantillon non nul, sa transformée en z est un monôme:

$$t \neq 0 : x(t) = 0 \quad (82)$$

$$x(n) = a \quad (83)$$

alors, d'après la définition de la transformée en z :

$$X(z) = az^{-n} \quad (84)$$

De même, la transformée d'un signal causal de durée finie n est un polynôme de degré n en z^{-1} .

4.2.4 Transformée d'une convolution discrète

L'opération de base en traitement numérique du signal est la convolution discrète. La convolution discrète $y(t)$ entre deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ s'écrit

$$y(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) \quad (85)$$

Cette convolution est une opération commutative, et on peut aussi l'écrire

$$y(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau), \quad (86)$$

forme qu'il sera préférable d'utiliser en filtrage numérique. Sa transformée en z est

$$Y(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) \right] z^{-t} \quad (87)$$

soit, en introduisant artificiellement $z^{-\tau}z^{\tau} = 1$

$$Y(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)z^{-\tau}z^{\tau}z^{-t} \right] \quad (88)$$

On suppose qu'on peut changer l'ordre des sommations

$$Y(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)z^{-\tau} \left[\sum_{t=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)z^{-t+\tau} \right] \quad (89)$$

En posant $t - \tau = u$

$$Y(z) = \left[\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)z^{-\tau} \right] \left[\sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u)z^{-u} \right] \quad (90)$$

On y reconnaît $X(z)$ et $H(z)$, transformée en z de $x(t)$ et $h(t)$

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (91)$$

En ce qui concerne les rayons de convergence, $Y(z)$ est définie sur l'intersection des deux couronnes où $X(z)$ et $H(z)$ sont définies. Dans les applications en traitement du signal, les deux couronnes contiennent en général le cercle de rayon 1, et $Y(z)$ est défini sur le cercle de rayon 1.

4.3 L'inverse de la transformée en z

La plupart du temps, l'utilisateur de méthodes de traitement numérique du signal se contente de retrouver grâce à une table la forme d'une transformée en z inverse. Pour cela, on effectue les opérations suivantes. Nous supposons que $X(z)$ s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle, soit

$$X(z) = P(z) + \frac{N(z)}{D(z)} \quad (92)$$

où le degré de $N(z)$ est inférieur au degré q de $D(z)$. Nous supposons que les q racines z_i du dénominateur $D(z)$ sont distinctes

$$D(z) = \prod_{i=1}^q (z - z_i) \quad (93)$$

$$i \neq k \Rightarrow z_i \neq z_k \quad (94)$$

On peut alors écrire $X(z)$ sous la forme

$$X(z) = P(z) + \sum_{i=1}^q \frac{\beta_i}{z - z_i} \quad (95)$$

où le "résidu" β_i du pôle z_i peut se calculer de différentes manières:

$$\beta_i = \left[\frac{N(z)}{\frac{dD(z)}{dz}} \right]_{z=z_i} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \frac{N(z)}{D(z)} \quad (96)$$

Le cas où les racines sont multiples est un peu plus compliqué. Nous invitons le lecteur à se référer à un ouvrage de mathématiques sur les fonctions de la variable complexe. On néglige souvent de se préoccuper du domaine de convergence de la transformée en z , car en traitement numérique du signal, on considère souvent implicitement que le domaine de convergence est une couronne contenant le cercle de rayon un. On peut toutefois montrer sur un exemple l'importance de ce domaine de convergence. Soit la fonction

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (97)$$

Si elle est définie à l'extérieur du cercle de rayon $|a|$ (on suppose que $|a| < 1$, la fonction qui a $X(z)$ pour transformée en z est

$$\begin{aligned} t < 0 & : x(t) = 0 \\ t \geq 0 & : x(t) = a^t \end{aligned} \quad (98)$$

Au contraire, si le domaine de convergence est le disque intérieur au cercle de rayon $|a|$, le développement (98) n'est plus autorisé, car $az^{-1} > 1$ et le développement correct est celui de

$$X'(z) = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} \quad (99)$$

nul pour les temps strictement positifs et vaut

$$t < 0 \quad : \quad x(t) = -a^t \quad (100)$$

Une transformée en z peut s'écrire aussi bien en fonction de la variable z que de la variable z^{-1} . La fonction dans le domaine temporel calculée par transformée inverse dépend de la couronne où la transformée est définie. Toutefois, par souci de clarté, il vaut mieux adopter l'usage courant et ne pas hésiter dans le cas où on traite de fonctions non causales à bien le préciser dans le texte.

4.4 Autre expression de la transformée en z inverse

Soit C est un contour d'intégration fermé entourant une fois l'origine du plan complexe et contenu dans la couronne où est définie $X(z)$. Ce contour sera souvent le cercle de rayon unité. On aura alors

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^t \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{jt\theta} d\theta. \quad (101)$$

La deuxième expression est une forme de la transformée de Fourier inverse. C'est la transformée de Fourier d'un signal périodique; dans le domaine temporel, c'est une séquence d'harmoniques, c'est à dire les échantillons du signal.

4.4.1 Transformée en z d'un produit, convolution circulaire

Soit le produit de fonctions

$$w(t) = x(t)y(t) \quad (102)$$

Nous supposons que les trois transformées $X(z)$, $Y(z)$ et $W(z)$ des signaux $x(t)$, $y(t)$ et $w(t)$ sont définies sur des couronnes contenant le cercle de rayon un. Dans le cas général $W(z)$ sera défini sur l'intersection des couronnes où $X(z)$ et $Y(z)$ sont définis. Si on remplace $y(t)$ par son expression en fonction de $Y(v)$ sous la forme d'une transformée inverse (101)

$$W(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_Y (v) v^t \frac{dv}{v} \right] z^{-t} \quad (103)$$

En commutant l'intégrale et la somme, et en effectuant les regroupements appropriés

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C Y(v) \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{z}{v} \right)^{-t} \frac{dv}{v} \quad (104)$$

qu'on peut écrire

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C Y(v) X\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \quad (105)$$

On peut écrire l'intégrale sur le cercle de rayon un

$$W(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\varphi}) X(e^{j(\theta-\varphi)}) d\varphi \quad (106)$$

On reconnaît là une opération de convolution sur des signaux périodiques; on utilise souvent l'expression "*convolution circulaire*".

4.5 Relation avec la transformée de Fourier

La transformée de Fourier $Y(\omega)$ d'un signal à temps continu $x(t)$ échantillonné en $y(t)$ est une fonction périodique obtenue par addition de répliques translatées de $\omega_e = 2\pi$ (nous supposons toujours que la période d'échantillonnage est égale à un.)

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2k\pi) \quad (107)$$

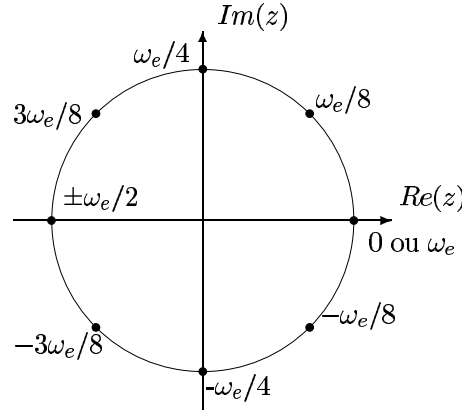


Figure 30: Graduation du cercle de rayon un en fonction de la fréquence d'échantillonnage lors de la mise en correspondance de la transformée en z et de la transformée de Fourier

On peut aussi écrire cette fonction comme étant la transformée de Fourier de la séquence des échantillons $x(n)$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-n) \right] e^{-j\omega t} dt \quad (108)$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \quad (109)$$

La valeur de la transformée de Fourier $Y(\omega)$ du signal échantillonné $y(t)$ est donnée par la valeur de sa transformée en z sur le cercle de rayon un (pour $z = e^{j\omega}$.) La graduation en fréquence du cercle de rayon est linéaire (cf. fig. 30).

4.5.1 Expression du carré module de la transformée de Fourier en termes de transformée en z

De nombreux problèmes nécessitent l'estimation du carré du module du signal à une fréquence donnée soit $|X(e^{j\theta})|^2$. En particulier il est souvent nécessaire de calculer l'énergie d'un signal dans le domaine des fréquences. Nous avons vu dans le paragraphe 2.5.5 que l'énergie d'un signal peut se calculer aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. Nous avons dans le cas des signaux échantillonnés une relation analogue. La transformée en z , $X(z)$ de la fonction d'autocorrélation $r(\tau)$ d'un signal $x(t)$

$$r(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) \quad (110)$$

de transformée en z $X(z)$ est

$$R(z) = X(z)X(z^{-1}) \quad (111)$$

La valeur à l'origine de $r(\tau)$, soit $r(0)$ est l'énergie du signal

$$r(0) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)X(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta. \quad (112)$$

4.5.2 Liens avec la transformée de Laplace

La transformée en z est un outil analogue à la transformée de Laplace, utilisée dans l'analyse des signaux et des systèmes à temps continu. On peut généraliser le lien établi par la formule (109). Soit la transformée de Laplace inverse, permettant de déduire $x(t)$ de $X(p)$ définie dans une bande parallèle à l'axe imaginaire dans le plan complexe autour d'un axe d'abscisse C

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p)e^{pt} dp \quad (113)$$

Aux instants d'échantillonnage

$$x(nT_e) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p) e^{pnT_e} dp \quad (114)$$

Soit $Y(z)$ la transformée en z du signal $x(t)$ échantillonné (pour simplifier nous supposons que $x(t)$ est nul pour les temps négatifs)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p) e^{pnT_e} dp \right] z^{-n} \quad (115)$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e) z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p) \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{pnT_e} z^{-n} \right] dp \quad (116)$$

Dans un domaine où la somme sur n converge

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{pT_e} z^{-1}} dp \quad (117)$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise le théorème des résidus. Si $x(t)$ est causale et d'énergie finie, elle a tous ses pôles à partie réelle négative et $Y(z)$ vaut

$$Y(z) = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{de } X(p)}} X(p) \frac{1}{1 - e^{pT_e} z^{-1}} \quad (118)$$

Ce qui donne la façon de calculer la transformée en z d'un signal échantillonné, connaissant la transformée de Laplace du signal à temps continu à partir duquel il a été créé.

On peut remarquer que si $X(p)$ est une fraction rationnelle, $Y(z)$ est aussi une fraction rationnelle. Si p_k est un pôle de $X(p)$, alors

$$z_k = \exp(p_k T_e) \quad (119)$$

est un pôle de $Y(z)$.

En automatique ou en traitement du signal, un pôle complexe $\alpha + j\beta$ dans le plan de Laplace correspond à une résonance caractérisée par son abscisse α ($\alpha < 0$) qui en donne l'amortissement, et son ordonnée β qui en donne la fréquence. Dans la transformation qui fait passer du plan de Laplace au plan " z ", la résonance est conservée et ses caractéristiques sont transformées: $\exp(T_e \alpha)$ caractérise l'amortissement (amortissement faible lorsque $\exp(\alpha)$ est très proche de un, amortissement important lorsque $\exp(T_e \alpha)$ est proche de zéro. La fréquence est maintenant caractérisée par un angle $\exp(jT_e \beta)$, représentation cohérente avec celle de la transformée de Fourier: l'angle 0 correspond à la fréquence 0 et aux fréquences multiples de la fréquence d'échantillonnage, l'angle $\pi/2$ au quart de la fréquence d'échantillonnage, l'angle π à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Si on suppose que tous les pôles de $X(p)$ sont dans une bande de fréquence $-\pi/T_e < \beta < \pi/T_e$, il y a une relation bijective entre les pôles de $X(p)$ et ceux de $Y(z)$. Cependant cette relation n'est pas vérifiée dans le cas des zéros, qui peuvent être modifiés. Il est possible d'établir la formule permettant de calculer la transformée de Laplace d'un signal à temps continu à partir de la transformée en z . En supposant que les pôles de $X(z)$ sont encore dans l'intervalle $[-\pi/T_e, \pi/T_e]$, ces pôles se déduisent de ceux de $Y(z)$ par

$$p_k = \frac{1}{T_e} \log(z_k) \quad (120)$$

où la détermination de la partie imaginaire du logarithme est dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

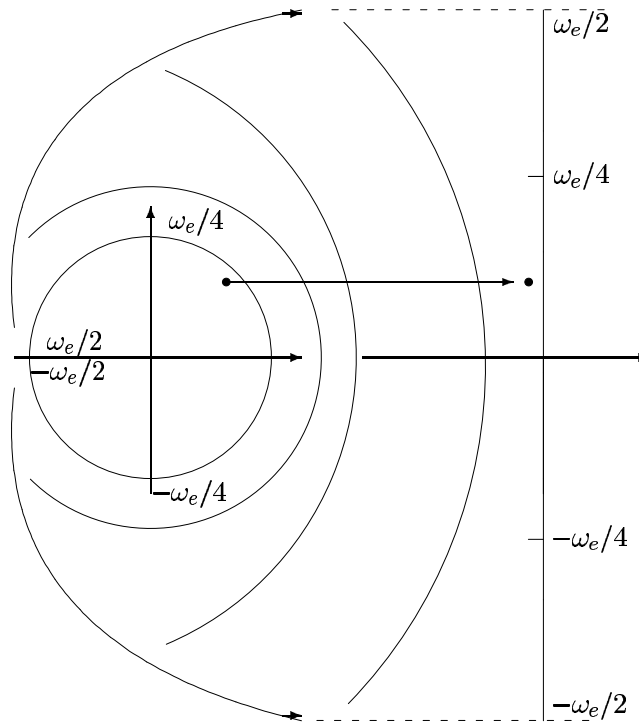


Figure 31: Mise en correspondance du plan complexe dans le cas de la transformée en z et de la transformée de Laplace (" p "); la périodicité liée à la rotation dans le plan z se traduit par une répétition verticale de la bande horizontale $-\omega_e/2 \leq \text{Im}(p) < \omega_e/2$

5 Le filtrage des signaux échantillonnés

Une des fonctions fondamentales en traitement du signal à temps continu est le filtrage linéaire effectué par des dispositifs électroniques. L'avènement du traitement numérique a conduit à une amélioration importante de ces dispositifs en termes de fiabilité, de reproductibilité, de souplesse et de complexité des fonctions réalisables. Tous les traitements seront maintenant réalisés grâce à des additionneurs et des multiplieurs numériques, et des mémoires. La précision peut être améliorée indéfiniment : il suffit d'augmenter la taille des mémoires; deux circuits de filtrage identiques donneront exactement le même résultat, ce qui n'est pas le cas pour les traitements analogiques. Dans la mesure où la cadence minimale d'échantillonnage n'est pas trop élevée, les coûts de fabrication des unités de traitement numérique diminuant, les industriels sont amenés à utiliser de plus en plus souvent les filtres numériques dans les applications. Les filtres numériques ont aussi d'autres propriétés difficiles voire impossibles à mettre en oeuvre dans le cas des filtres analogiques.

Notons que des applications dont l'importance économique est considérable utilisent intensivement le filtrage numérique en temps réel (transmissions numériques, codage des sons MP3, synthèse de parole, télévision numérique par exemple).

5.1 Rappel sur la convolution discrète

Soit l'opération de convolution discrète de $x(t)$ par $h(t)$ (ou filtrage linéaire) par le filtre à réponse impulsionnelle $h(t)$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(t-k) \quad (121)$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante du fait de la commutativité de la convolution

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-k)h(k) \quad (122)$$

C'est cette deuxième forme qui sera utilisée le plus souvent en filtrage numérique. Dans le domaine des transformées en z , cette opération devient un produit

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (123)$$

5.1.1 Réponse en fréquence d'un filtre

En particulier, si on fixe $z = e^{j\theta}$ (sur le cercle de rayon un), on obtient le cas particulier de la transformée de Fourier. Ainsi, pour amplifier, atténuer, déphaser un signal, il suffira de trouver les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$, ou de sa réponse en fréquence $H(e^{j\theta})$ définie en module et en phase pour toutes les fréquences entre $-\pi$ et π et de programmer un calculateur numérique pour effectuer le calcul de convolution. Il faut en général respecter deux conditions, le filtre doit être causal et stable.

5.2 Causalité, Stabilité

Un filtre est causal s'il n'est pas nécessaire de connaître les échantillons futurs ($x(t+m)$, $m > 0$) de l'entrée $x(t)$ pour en calculer la sortie $y(t)$ à l'instant t . (L'effet ne peut pas précéder la cause.) Ceci se traduit par le fait que la réponse impulsionnelle $h(t)$ doit être nulle pour $t < 0$.

Un filtre sera stable si, lorsqu'on lui applique une entrée bornée, la sortie est aussi bornée. Un filtre sera stable si sa réponse impulsionnelle vérifie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < M \quad (124)$$

5.3 Les filtres à réponse impulsionnelle finie

Dans l'équation (122), on ne peut faire une quantité infinie de calculs, on sera donc amené à programmer, dans le cas des filtres causaux, une somme sur un nombre fini d'échantillons

$$y(t) = \sum_{k=0}^q x(t-k)h(k) \quad (125)$$

La transformée en z de la séquence $b_0, \dots, b_q$ est

$$B(z) = \sum_{t=0}^q b(t)z^{-t} \quad (126)$$

C'est un polynôme de degré q en z^{-1} . Ce type de filtre ne pose jamais de problème de stabilité.

5.3.1 Interprétation de l'effet du filtre dans le domaine des fréquences

La valeur de la réponse en fréquence du filtre $B(z)$ est donnée par la valeur de $B(e^{j\theta})$ sur le cercle de rayon 1 : θ variant de $-\pi$ à π , ce qui correspond à une variation de $-\omega_e/2$ à $\omega_e/2$. Considérons le cas où les coefficients de $B(z)$ sont complexes pour $q = 1$. $zB(z)$ a une racine complexe située sur le cercle de rayon un, $z_0 = -e^{j\theta_0}$ et $B(e^{j\theta})$ s'annulera pour $\theta = \theta_0 + \pi$. L'allure de la réponse en fréquence, en module et en phase est donnée dans la fig. 33.

Si θ_0 est proche de 0, on supprime une composante fréquentielle dans le domaine des basses fréquences. Si θ_0 est proche de π , on supprime une composante dans le domaine des hautes fréquences, etc.... Si la racine z_0 est de module différent de 1, il y aura atténuation des amplitudes dans le domaine au voisinage de θ_0 , mais il n'y aura pas annulation de la composante.

5.3.2 Les filtres à réponse impulsionnelle symétrique

C'est une forme de filtre où $b_k = b_{q-k}$. Si on calcule les racines du polynôme $B(z)$, on remarque que si z_0 est racine, alors $1/z_0$ est aussi racine. Les positions possibles des racines sont données par la figure 34. Si elles sont complexes et de module différent de un, elles se regroupent par quatre

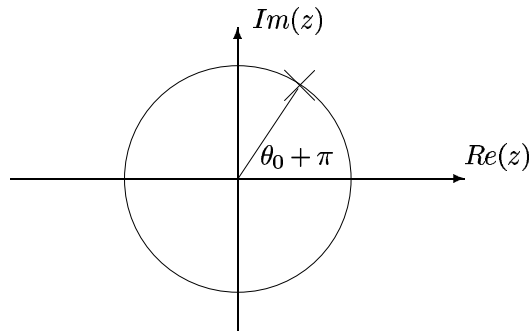


Figure 32: Zéro d'un filtre du premier ordre à coefficient complexe

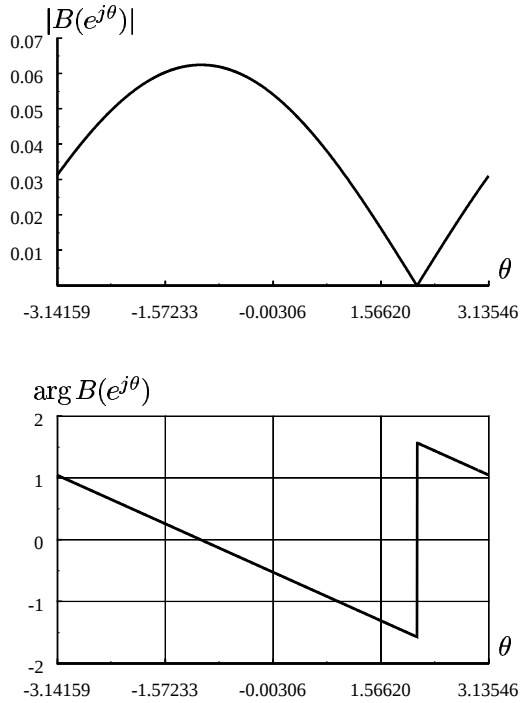


Figure 33: Module et phase de la réponse en fréquence d'un filtre non récursif du premier ordre ayant un zéro complexe sur le cercle de rayon un ($z_0 = e^{j\theta_0}$), on remarque que la phase fait un saut de π à la fréquence donnée par la racine du filtre; ailleurs c'est une fonction linéaire de la fréquence

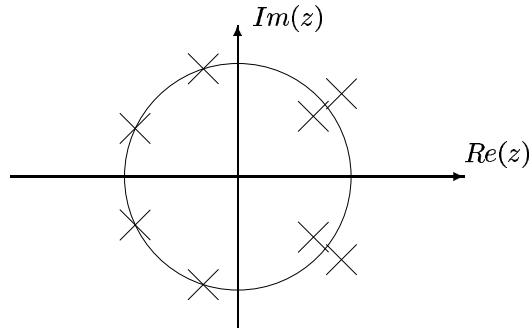


Figure 34: Positions possibles des racines d'un filtre non récursif à réponse impulsionnelle réelle symétrique: ces racines sont soit sur le cercle unité, soit regroupées par quadruplets avec leur inverse, leur conjugué et l'inverse de leur conjugué

z_0 , $\bar{z}_0$, $1/z_0$ et $1/\bar{z}_0$. Sinon elles se trouvent ainsi que leur complexe conjugué sur le cercle de rayon un.

Si de plus on suppose que $z^q B(z)$ n'a pas de racines sur le cercle de rayon un, alors $B(z)$ est un réel (positif si $b_0 = 1$). Dans ce cas le déphasage apporté par le filtre est nul. C'est un filtre qui déforme relativement peu les signaux. Ce type de filtre ne peut pas être réalisé simplement en utilisant les technologies analogiques.

5.3.3 Filtre à déphasage minimal

Si $z^q B(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle de rayon un on obtient un filtre qui retarde moins le signal que tous les filtres $B'(z)$ tels que

$$|B'(e^{j\theta})| = |B(e^{j\theta})| \quad (127)$$

mais pour lesquels $z^q B'(z)$ a au moins une racine à l'extérieur du cercle de rayon un: pour chacune des racines z_0 de $B(z)$, le remplacement de z_0 par $1/\bar{z}_0$ ne modifie pas la forme du module de $B(z)$ au facteur $1/z_0$ près:

$$\begin{aligned} |1 - \frac{1}{z_0} e^{-j\theta}| &= \frac{1}{|z_0|} |\bar{z}_0 - e^{-j\theta}| \\ &= \frac{1}{|z_0|} |1 - \bar{z}_0 e^{j\theta}| \\ &= \frac{1}{|z_0|} |1 - z_0 e^{-j\theta}| \end{aligned} \quad (128)$$

Le filtre dont la réponse impulsionnelle est composé des deux échantillons $\{1, -z_0\}$ retarde moins le signal que le filtre composé des deux échantillons $\{-z_0, 1\}$: en moyenne le premier le retarde au plus d'un "demi-échantillon" tandis que le second le retarde au moins d'un demi-échantillon.

De plus, le filtre récursif inverse aura tous ses pôles à l'intérieur du cercle de rayon un; ce sera un filtre stable (voir le paragraphe suivant 5.4 consacré à ce type de filtres).

5.4 Les filtres à réponse impulsionnelle infinie

Il est possible dans un cas particulier de réaliser des filtres dont la réponse impulsionnelle a un nombre infini d'échantillons, mais ceci nécessite l'expression de la sortie du filtre sous la forme d'une équation récurrente liant $y(t)$ aux échantillons précédemment calculés $y(t-1)$, $y(t-2)$, ... et aux échantillons du signal d'entrée, $x(t)$, $x(t-1)$, $x(t-2)$, ... Considérons par exemple l'équation récurrente suivante, en supposant que les valeurs des conditions initiales $y(-1)$, $y(-2)$, ..., $y(-p)$ sont nulles:

$$y(t) = \sum_{k=0}^q b(k)x(t-k) - \sum_{i=0}^p a(i)y(t-i) \quad (129)$$

On définit les polynômes

$$B(z) = \sum_{k=0}^q b(k)z^{-k} \quad (130)$$

$$A(z) = \sum_{i=0}^p a(i)z^{-i} \text{ où } a_0 = 1 \quad (131)$$

Si on connaît la valeur de la transformée en z de $x(t)$, on peut calculer la transformée en z de l'équation récurrente

$$Y(z) = \sum_t y(t)z^{-t} = \sum_t \left[\sum_{k=0}^q b(k)x(t-k)z^{-t} - \sum_{i=1}^p a(i)y(t-i)z^{-t} \right] \quad (132)$$

qu'on peut aussi écrire

$$Y(z) = \sum_t y(t)z^{-t} = \sum_t \left[\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}x(t-k)z^{-(t-k)} - \sum_{i=1}^p a(i)z^{-i}y(t-i)z^{-(t-i)} \right] \quad (133)$$

$$Y(z) = \sum_t y(t)z^{-t} = \left[\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}X(z) - \sum_{i=1}^p a(i)z^{-i}Y(z) \right] \quad (134)$$

et en remarquant que la valeur de la transformée en z de l'opérateur retard est z^{-1} on obtient

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}X(z) \quad (135)$$

Dans le domaine des transformées en z , la réponse du filtre n'est plus un polynôme mais une fraction rationnelle. Dans ce cas le filtre n'est pas toujours stable. Nous verrons dans un prochain paragraphe une méthode pour analyser la stabilité d'un filtre récursif (autre terme pour nommer les filtres à réponse impulsionnelle infinie).

L'écriture complète de la transformée $Y(z)$ nécessite la connaissance des valeurs des conditions initiales $x(-q), \dots, x(-1), y(-p), \dots, y(-1)$ que nous avons supposées égales à zéro. La transformée en z du signal $x_k(t)$ égal à $x(t-k)$ pour $t \geq 0$ et nul pour $t < 0$ est donnée par la formule connue sous le nom du théorème de l'avance

$$X_k(z) = z^k X(z) + x(-1)z^{k-1} + x(-2)z^{k-2} + \dots + x(-k) \quad (136)$$

que nous noterons sous la forme

$$X_k(z) = z^k X(z) + x(z, k) \quad (137)$$

où $X(z)$ est la transformée en z du signal causal $x(0), x(1), \dots, x(t), \dots$

De même

$$Y_i(z) = z^i Y(z) + y(-1)z^{i-1} + y(-2)z^{i-2} + \dots + y(-i) \quad (138)$$

que nous noterons sous la forme

$$Y_i(z) = z^i Y(z) + y(z, i) \quad (139)$$

La transformée en z de l'équation récurrente prenant en compte les conditions initiales s'écrit

$$Y(z) = \sum_{k=0}^q b(k)[z^k X(z) + x(z, k)] - \sum_{i=1}^p a(i)[z^i Y(z) + y(z, i)] \quad (140)$$

soit

$$Y(z) = \sum_{k=0}^q b(k)[z^k X(z) + x(z, k)] - \sum_{i=1}^p a(i)[z^i Y(z) + y(z, i)] \quad (141)$$

$$Y(z) = \frac{1}{A(z)} \left[B(z)X(z) + \sum_{k=0}^q b(k)x(z, k) - \sum_{i=1}^p a(i)y(z, i) \right] \quad (142)$$

Les conditions initiales se traduisent par des modifications du numérateur de la fonction de transfert mais ne modifient pas les pôles qui, eux ne proviennent que des pôles de $X(z)$ et $A(z)$.

5.4.1 Stabilité des filtres récursifs

Nous supposons que le filtre étudié est causal. Pour qu'un filtre soit stable, il faut que la somme des modules des échantillons de sa réponse impulsionnelle soit finie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < M \quad (143)$$

Le module de la transformée en z , $|H(z)|$ calculé pour $|z| > 1$ vérifie

$$|H(z)| < \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)z^{-k}| < \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < M \quad (144)$$

Le module de $H(z)$ doit donc être borné pour $|z| > 1$. $H(z)$ ne doit pas avoir de pôles à l'extérieur du cercle de rayon unité. Un filtre récursif ne sera stable que si tous ses pôles sont à l'intérieur

du cercle de rayon un. Dans le cas des fonctions de transfert causales et rationnelles de degré fini, si les pôles sont tous à l'intérieur du cercle de rayon 1, une décomposition en éléments simples et un calcul de transformée en z inverse montre que la réponse impulsionnelle est alors une somme d'exponentielles décroissantes: le filtre est toujours stable.

Remarque. Exactement comme dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle finie, la position des zéros de la fonction de transfert (les racines du polynôme numérateur) n'influence pas la stabilité du filtre.

5.4.2 Analyse de la stabilité du filtre récursif: l'algorithme de Schur-Cohn

Pour savoir si un filtre récursif est stable ou non, il faut compter le nombre de racines de son dénominateur $z^p A(z)$ à l'extérieur du cercle de rayon un. Nous présentons ici un algorithme classique qui permet de savoir si ce nombre est nul. On se donne un polynôme $z^p A_p(z)$ de degré p ($a(0) = 1$)

$$z^p A_p(z) = a(0)z^p + a(1)z^{p-1} + \dots + a(p-1)z + a(p) \quad (145)$$

On construit un polynôme dont les coefficients sont ceux de $z^p A_p(z)$ pris en sens inverse

$$z^p A_p^*(z) = a(p)z^p + a(p-1)z^{p-1} + \dots + a(1)z + a(0) \quad (146)$$

ou encore

$$z^p A_p^*(z) = A_p(z^{-1}) \quad (147)$$

On construit ensuite un polynôme de degré $p-1$ et dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1:

$$z^{p-1} A_{p-1}(z) = a_{p-1}(0)z^{p-1} + a_{p-1}(1)z^{p-2} + \dots + a_{p-1}(p-2)z + a_{p-1}(p-1) \quad (148)$$

en effectuant une combinaison linéaire des polynômes $z^p A_p(z)$ et $z^p A_p^*(z)$. On pose

$$k_{p-1} = a_p \quad (149)$$

et on calcule le polynôme de degré $p-1$ tel que le coefficient de son terme de plus haut degré $a_{p-1}(0)$ soit égal à un :

$$z^{p-1} A_{p-1}(z) = \frac{z^{-1}}{1 - k_{p-1}^2} [z^p A_p(z) - k_{p-1} z^p A_p^*(z)] \quad (150)$$

(le facteur z^{-1} traduit la réduction de degré.)

On réitère cette opération jusqu'à ce que le degré du polynôme $A_0(z)$ soit nul. On obtient ainsi une séquence $k_{p-1}, \dots, k_0$. Alors le polynôme $z^p A_p(z)$ a toutes ses racines strictement inférieures à un en module si et seulement si tous les coefficients $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$ sont compris entre -1 et $+1$. Si un des coefficients k_m a un module égal à un, $z^p A_p(z)$ a au moins une racine à l'extérieur du cercle de rayon un, le filtre récursif $1/A_p(z)$ est un filtre instable.

5.5 exemples de filtres du premier et du deuxième ordre

Les filtres récursifs et non récursifs peuvent se réaliser au moyen de filtres du premier et du deuxième ordre. Il est donc intéressant de donner les caractéristiques principales de ces filtres en termes de réponse impulsionnelle et de réponse en fréquence. Nous ne considérerons ici que les filtres causaux.

5.5.1 Analyse en fréquence d'un filtre non récursif du premier ordre

C'est un filtre de la forme

$$y(t) = x(t) + b.x(t-1) \quad (151)$$

Sa réponse impulsionnelle est nulle pour tous les échantillons sauf pour $t = 0$ où elle vaut 1 et $t = 1$ où elle vaut b . Sa transformée en z est le polynôme

$$B(z) = 1 + bz^{-1} \quad (152)$$

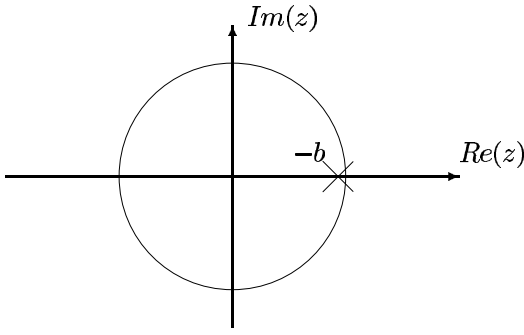


Figure 35: Racine d'un filtre du premier ordre à partie réelle positive ($b < 0$)

définie dans tout le plan complexe. Sa réponse en fréquence est donnée par

$$B(e^{j\theta}) = 1 + be^{-j\theta} \quad (153)$$

Un exemple est donné dans la figure 36. Ce filtre agit comme un filtre passe-haut, car b est un nombre négatif (la racine de $zB(z)$ a une partie réelle positive). Il agit comme un filtre passe-bas lorsque la racine de $zB(z)$ a une partie réelle négative. La position de la racine est donnée par la figure 35

5.5.2 Analyse en fréquence d'un filtre récursif du premier ordre

C'est un filtre de la forme

$$y(t) = x(t) - b.y(t-1) \quad (154)$$

Dans l'exemple donné sur la figure 37, le filtre ne comporte pas de zéro et un seul pôle à partie réelle positive. Ce filtre est stable seulement si $|b| < 1$. Ce filtre agit comme un filtre passe-bas, en amplifiant les basses fréquences et en atténuant les hautes fréquences. La réponse impulsionnelle de ce filtre est représentée sur la figure 38

5.5.3 Analyse en fréquence d'un filtre non récursif du deuxième ordre

Nous prendrons un exemple où les racines du polynôme $B(z)$ sont des racines complexes conjuguées.

$$B(z) = 1 - 2\rho \cos(\varphi)z^{-1} + \rho^2 z^{-2} \quad (155)$$

Ce filtre agit comme un filtre "coupe-bande" (il atténue les fréquences dans une bande de fréquence donnée). L'atténuation est d'autant plus importante que les racines sont proches du cercle de rayon un (ρ proche de 1). La position des zéros de ce filtre est donnée par la figure 39. La réponse en fréquence de ce filtre est représentée figure 40.

5.5.4 Analyse en fréquence d'un filtre récursif du deuxième ordre

Un exemple est donné dans la figure 41. Les pôles du filtre (racines du dénominateur)

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - 2\rho \cos(\varphi)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (156)$$

sont complexes conjugués. Le filtre sera stable seulement si ses pôles sont tous à l'intérieur du cercle de rayon un ($\rho < 1$). Ce filtre agit comme un filtre passe-bande. La résonance sera d'autant plus forte que les pôles seront proches du cercle de rayon un. La réponse impulsionnelle de ce filtre est représentée sur la figure 42.

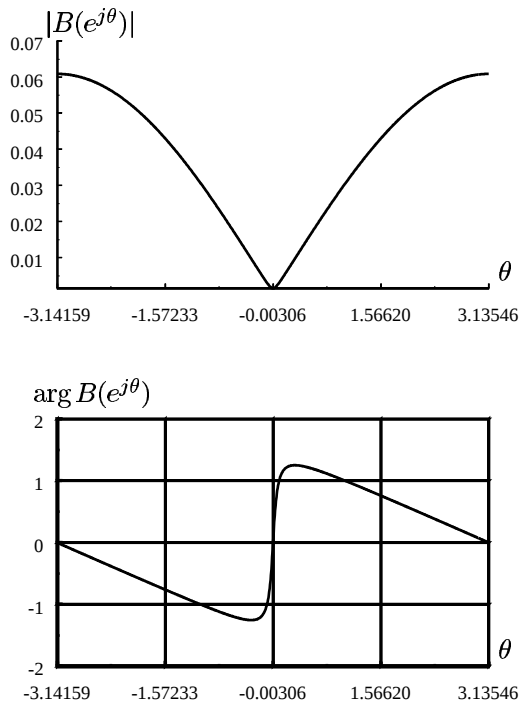


Figure 36: Module et phase de la réponse en fréquence d'un filtre non récursif du premier ordre: il s'agit ici d'un filtre passe-haut dont la racine est réelle et positive

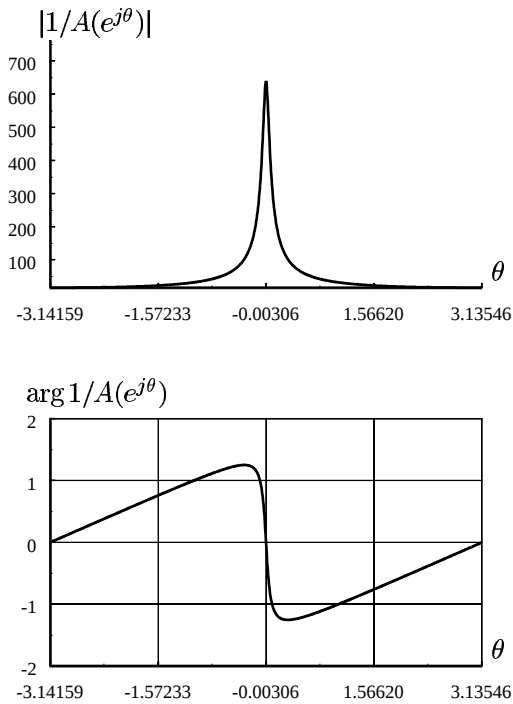


Figure 37: Module et phase de la réponse en fréquence d'un filtre récursif du premier ordre

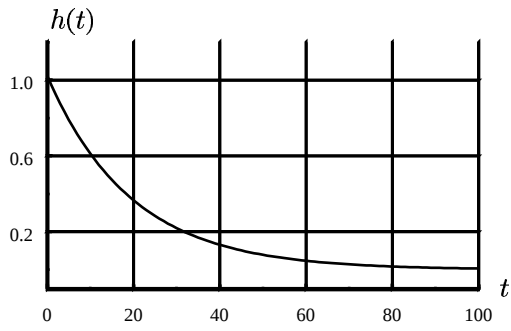


Figure 38: Réponse impulsionnelle d'un filtre récursif du premier ordre

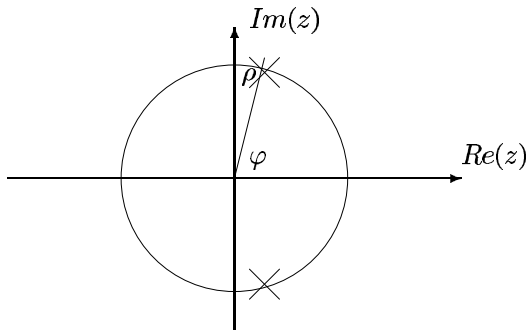


Figure 39: Racines complexes d'un filtre non récursif du deuxième ordre

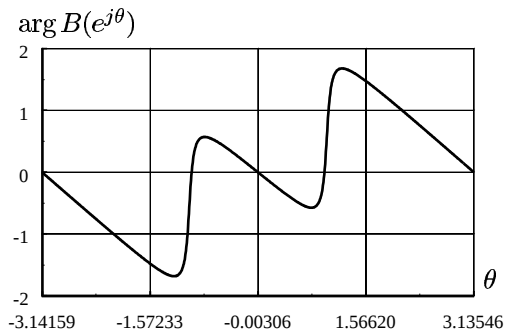
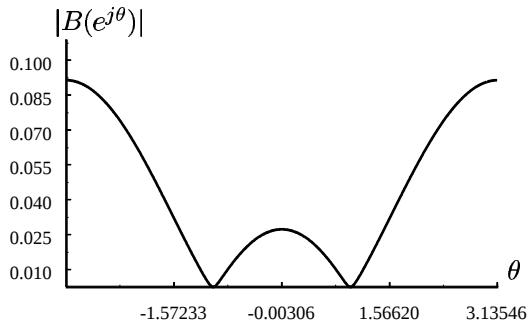


Figure 40: Module et phase de la réponse en fréquence d'un filtre non récursif du deuxième ordre

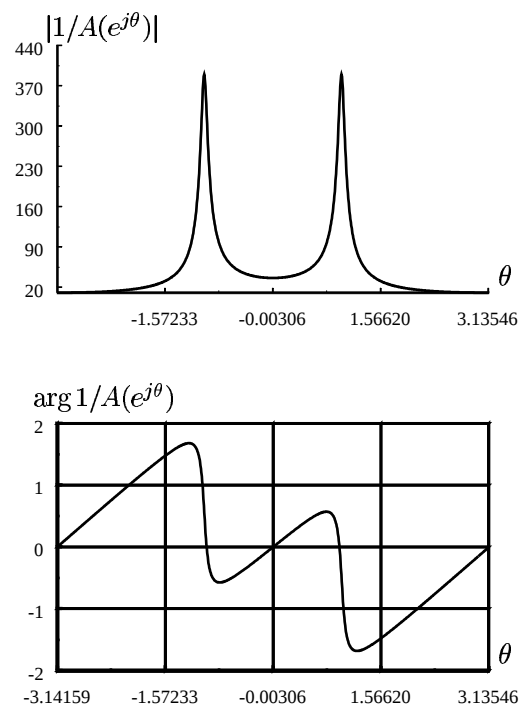


Figure 41: Module et phase de la réponse en fréquence d'un filtre récursif du deuxième ordre

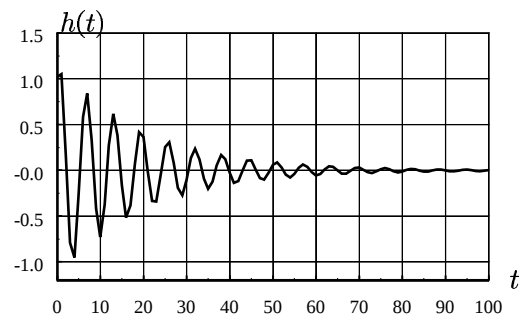


Figure 42: Réponse impulsionnelle d'un filtre récursif du deuxième ordre

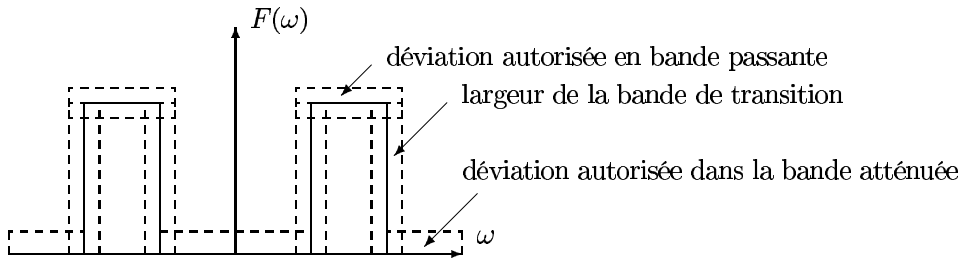


Figure 43: Exemple de gabarit d'un filtre passe-bande

5.6 Notions sur la synthèse des filtres numériques

Sans rentrer dans les détails de synthèse, le lecteur peut être amené à concevoir des filtres simples. Notre but est de montrer les compromis nécessaires à l'obtention de résultats satisfaisants. Le lecteur cherchant des approfondissements sur ces techniques pourra se référer à l'ouvrage de M. Bellanger, "Traitement numérique du signal, théorie et pratique", éditions Masson, 1987 et à celui de R. Boite et H. Leich, "Les filtres numériques", éditions Masson, 1990.

5.6.1 Filtres à réponse impulsionnelle finie

Un filtre est conçu à partir d'une réponse en fréquence idéale avec des marges d'erreur autorisées (un gabarit, figure 43) : on ne peut pas réaliser un filtre parfait, il faut s'en rapprocher le plus possible et se donner le niveau des différences acceptables. Une manière de procéder est de se donner le filtre idéal à réaliser dans le domaine des fréquences $F(\omega)$, de revenir dans le domaine temporel en calculant la transformée de Fourier inverse soit $f(t)$. Cette fonction $f(t)$ n'est en général pas causale et la réalisation effective du filtre nécessitera un retard. On remplace la fonction $f(t)$ en général de durée infinie par une fonction de durée finie $g(t)$ en multipliant $f(t)$ par une fonction de pondération que nous prendrons constante dans un premier temps :

$$\begin{aligned} t < -T/2 & : h(t) = 0 \\ -T/2 \leq t < T/2 & : h(t) = 1 \\ T/2 \leq t & : h(t) = 0 \end{aligned} \quad (157)$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier de $h(t)$ étant $H(\omega)$, on a

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega - \theta) F(\theta) d\theta \quad (158)$$

On voit ainsi en général des oscillations parasites (connues sous le nom de phénomène de Gibbs) et dans le cas des filtres passe-bande une largeur non nulle de la bande de transition (domaine entre la bande passante et les bandes où le signal est atténué). On peut atténuer l'amplitude de ces oscillations en utilisant une fenêtre de pondération, par exemple la fenêtre de Hamming (fig. 44).

$$\begin{aligned} t < -T/2 & : h'(t) = 0 \\ -T/2 \leq t < T/2 & : h'(t) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi \frac{t}{T}) \\ T/2 \leq t & : h'(t) = 0 \end{aligned} \quad (159)$$

Cette atténuation des oscillations parasites se fait au détriment de la largeur de la bande de transition (qui est doublée dans le cas présent). Il existe d'autres formes de fenêtres de pondérations qui seront décrites dans le chapitre consacré à l'analyse spectrale. Une forme intéressante de fenêtre est la fenêtre de Papoulis.

$$\begin{aligned} t < -T/2 & : h'(t) = 0 \\ -T/2 \leq t < T/2 & : h'(t) = \cos(\pi \frac{t}{T}) \\ T/2 \leq t & : h'(t) = 0 \end{aligned} \quad (160)$$

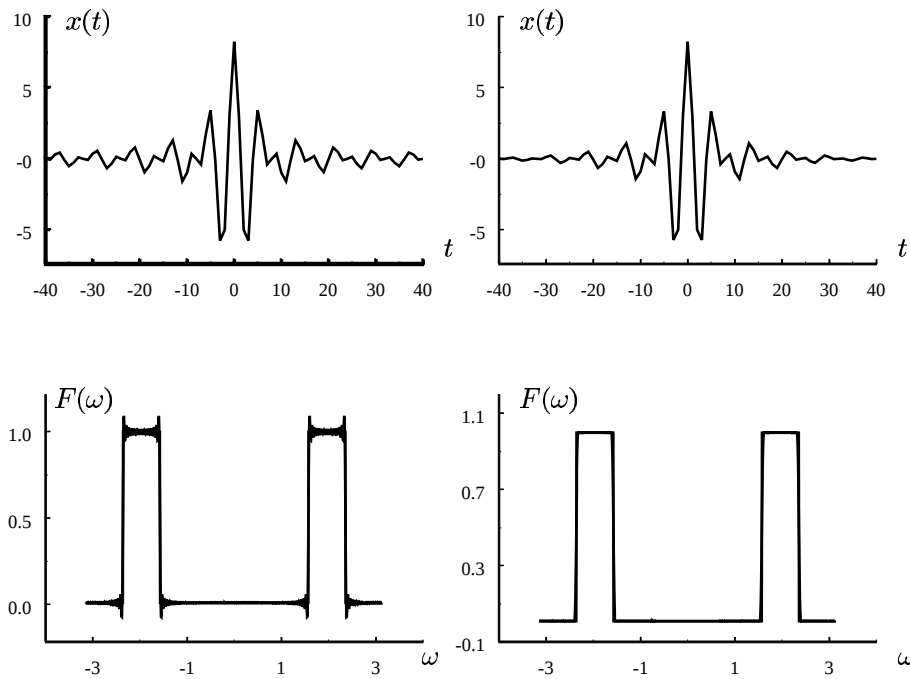


Figure 44: Effet de la troncature de la réponse impulsionnelle d'un filtre dans le domaine temporel et dans le domaine des fréquences

Son avantage par rapport à la fenêtre de Hamming est de réduire la bande de transition; mais c'est au détriment des oscillations parasites qui sont augmentées. Son utilisation peut être un compromis entre l'application de la fenêtre rectangulaire introduisant une coupure brutale de la réponse impulsionnelle aux extrémités de la fenêtre et la fenêtre de Hamming qui peut atténuer trop fortement le signal à ces extrémités. Les effets de ces différentes fenêtres sont données figure 45. Bien que cette fenêtre soit moins utilisée que la fenêtre de Hamming, on peut préconiser son utilisation lorsqu'on souhaite réduire la largeur de la bande de transition, car le lobe principal de la transformée de Fourier de la fenêtre de Papoulis est moins large que celui de la fenêtre de Hamming. Toutefois l'amplitude de ses lobes latéraux est plus importante (un peu plus de suroscillations au voisinage de la bande de transition,).

5.6.2 Synthèse des filtres récurrents

La méthode de synthèse qui est proposée ici est fondée sur la technique de prédiction linéaire qui est décrite au chapitre huit.

Les méthodes de synthèse des filtres récurrents sont souvent issues de travaux antérieurs sur les filtres analogiques: il existe de nombreuses formes de filtres aux propriétés variées adaptées à certaines applications. On peut transférer cette technique dans le domaine des filtres numériques en effectuant une transformation affine (on passe du plan en p au plan en z)

$$z = \frac{1-p}{1+p} \quad (161)$$

La partie à partie réelle négative du plan complexe se transforme en l'intérieur de cercle unité. Par conséquent la stabilité du filtre analogique est préservée par cette transformation. Toutefois cette mise en correspondance des deux plans est tout à fait différente de la mise en correspondance qui fait passer de la variable p à la variable z .

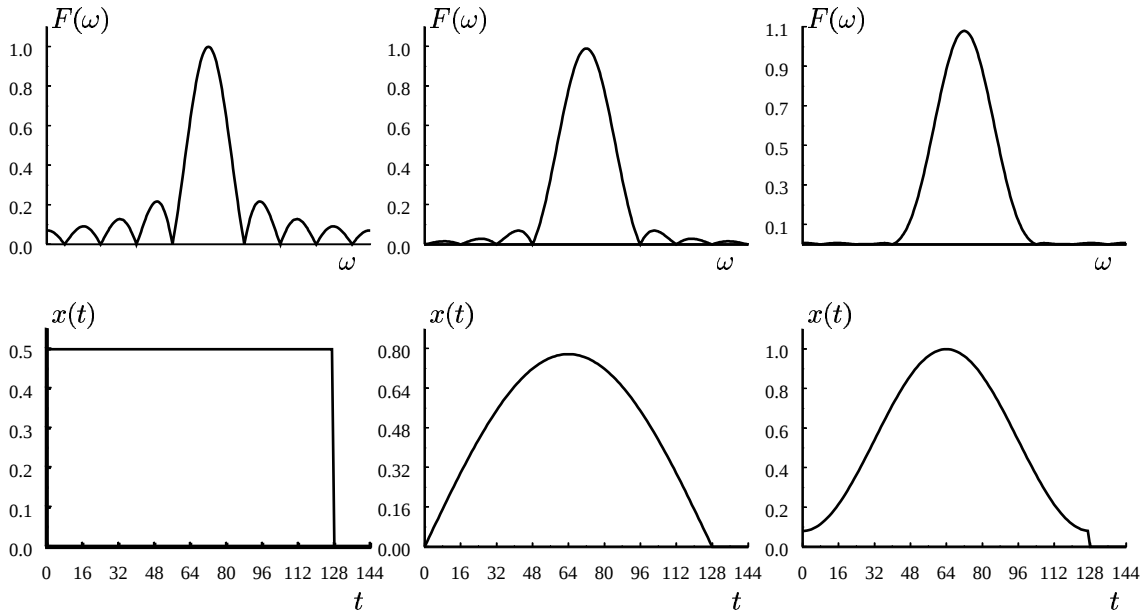


Figure 45: Lobe principal et lobes latéraux des fenêtres rectangulaire, de Papoulis et de Hamming

5.6.3 Utilisation des techniques de prédiction linéaire

A partir du gabarit $F(\omega)$, on peut, par transformée de Fourier inverse, calculer une fonction d'autocorrélation, $r_D(\tau)$ pour des valeurs discrètes de τ

$$R_D = \begin{bmatrix} r_D(0) & r_D(1) & r_D(2) & \cdots & \cdots & \cdots & r_D(p-2) & r_D(p-1) \\ r_D(1) & r_D(0) & r_D(1) & \cdots & \cdots & \cdots & r_D(p-3) & r_D(p-2) \\ r_D(2) & r_D(1) & r_D(0) & \cdots & \cdots & \cdots & r_D(p-4) & r_D(p-3) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_D(p-2) & r_D(p-3) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_D(0) & r_D(1) \\ r_D(p-1) & r_D(p-2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_D(1) & r_D(0) \end{bmatrix} \quad (162)$$

et résoudre le système d'équations

$$R_D \begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_D(1) \\ \vdots \\ r_D(p) \end{bmatrix} \quad (163)$$

Le polynôme

$$A(z) = 1 + a(1)z^{-1} + \cdots + a(p)z^{-p} \quad (164)$$

sera le dénominateur de la fonction de transfert du filtre cherché. On calcule ensuite

$$G(\omega) = \frac{1}{F(\omega)|A(e^{j\omega})|^2} \quad (165)$$

On réalise les mêmes opérations pour obtenir le numérateur $B(z) = b(0) + b(1)z^{-1} + \cdots + b(q)z^{-q}$: calcul de $r_N(\tau)$ par transformée de Fourier inverse de $G(\omega)$, et résolution du système d'équations

$$R_N \begin{bmatrix} b(1) \\ \vdots \\ b(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_N(1) \\ \vdots \\ r_N(p) \end{bmatrix} \quad (166)$$

Cette méthode garantit la stabilité du filtre récursif ainsi réalisé. Il est aussi à minimum de phase; son inverse est lui aussi un filtre stable.

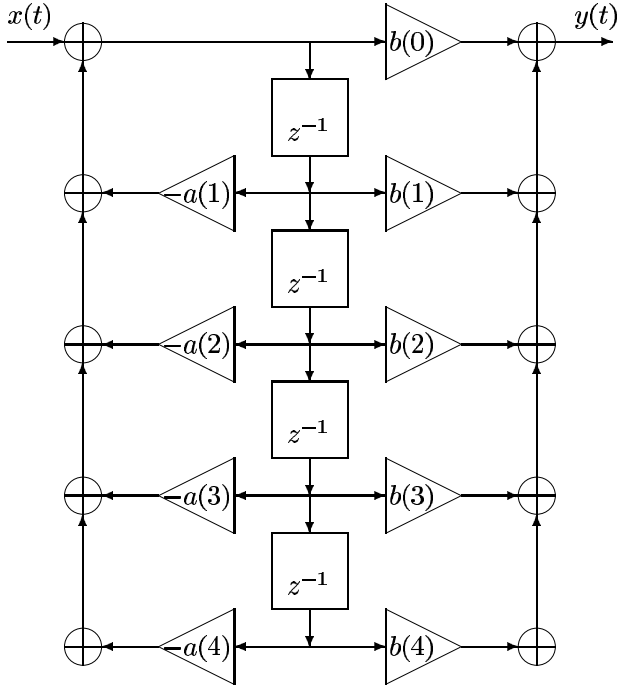


Figure 46: Structure de filtre récursif minimisant le nombre de données à mémoriser

5.7 Structures de filtres récursifs

On peut programmer un filtre de différentes manières. La formule (129) est l'implémentation la plus directe.

5.7.1 Différentes décompositions possibles

Elle nécessite une quantité de mémoire qui peut être réduite (fig. 46) et donne exactement le même résultat. On a noté dans cette figure l'opération de mémorisation comme un retard d'un échantillon représenté par sa transformée en z soit z^{-1} . On peut aussi décomposer la fraction rationnelle $\frac{B(z)}{A(z)}$ de différentes manières. Par exemple on aura une décomposition en cellules parallèles de la manière suivante. On effectue une décomposition en éléments simples de $\frac{B(z)}{A(z)}$ et on applique chacun des filtres au signal $x(t)$. Le signal $y(t)$ est alors obtenu en additionnant les sorties des différents filtres (fig. 47a). La manière d'effectuer cette décomposition est unique. Les éléments de la structure peuvent être des filtres du premier ordre, si on accepte d'effectuer les calculs sur le corps des complexes. Si on veut effectuer des calculs avec des nombres réels, la décomposition utilisera des fractions rationnelles de degré un lorsque les pôles sont réels et de degré deux lorsque les pôles sont regroupés par paires de pôles imaginaires conjugués.

On peut aussi effectuer une décomposition de $\frac{B(z)}{A(z)}$ sous la forme d'un produit de fractions rationnelles de degré un ou deux. On peut dans cette structure série (fig. 47b), choisir l'appariement des pôles et des zéros de chaque cellule et l'ordre dans lequel on effectue les calculs de manière à optimiser la précision des calculs.

5.7.2 Filtre en treillis

Une autre structure intéressante, en particulier lorsqu'on souhaite contrôler précisément la stabilité d'un filtre est la structure en "treillis" (fig. 49) qui fait intervenir les coefficients "parcor" k_i de l'algorithme de Schur-Cohn de test de stabilité. Dans cette structure les calculs récursifs sont les

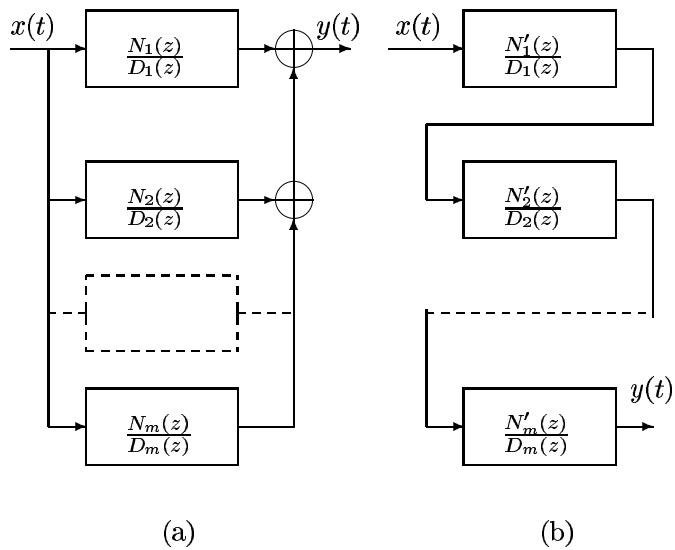


Figure 47: Structure parallèle (a) et structure série (b) des filtres récursifs

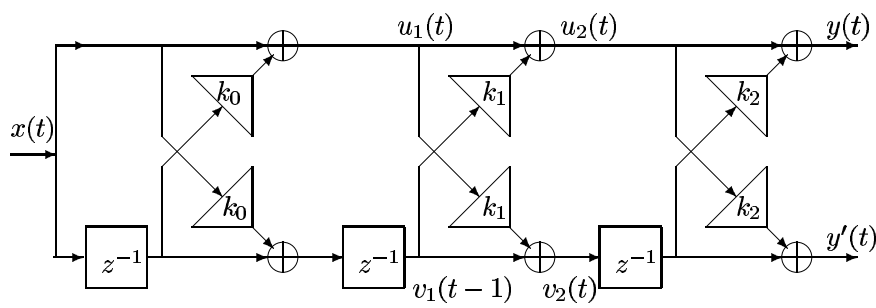


Figure 48: Structure du filtre non récursif en treillis

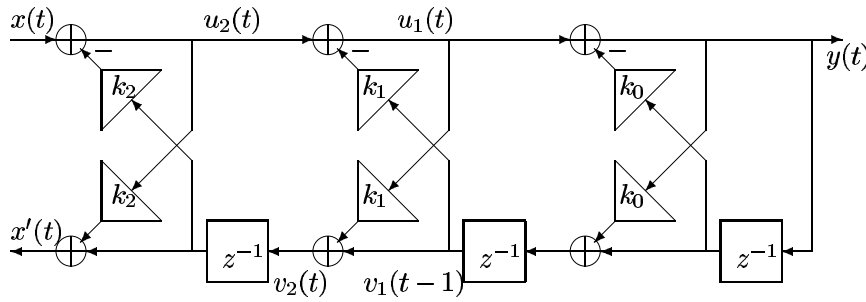


Figure 49: Structure du filtre récursif en treillis

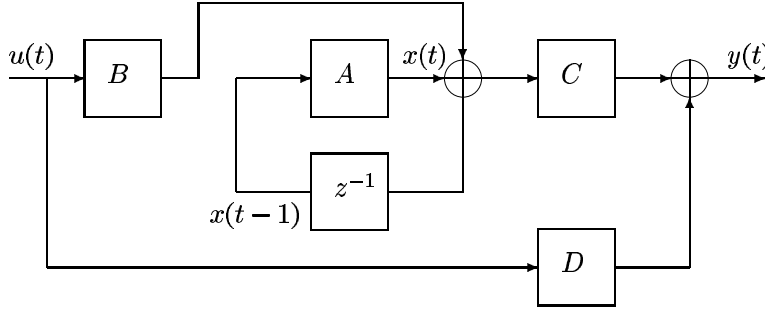


Figure 50: Représentation d'état d'un filtre numérique

suivants

$$\begin{aligned}
 u_p(t) &= x(t) \text{ (entrée)} \\
 m &= p-1, \dots, 0 \quad \left| \begin{array}{l} u_m(t) = u_{m+1}(t) - k_m v_m(t-1) \\ v_{m+1}(t) = v_m(t-1) + k_m u_{m+1}(t) \end{array} \right. \\
 v_0(t) &= u_0(t) \text{ (bouclage à droite)} \\
 y(t) &= v_p(t) \text{ (sortie)}
 \end{aligned} \tag{167}$$

Notez que le bouclage respecte bien la causalité: en effet dans chaque boucle il y a une mémorisation z^{-1} (donc un retard). Cette structure de filtre permet de garantir la stabilité du filtre réalisé. Cette propriété est utilisée en particulier lors de l'analyse/synthèse de la parole par la méthode dite de "prédiction linéaire" que nous étudierons au chapitre 8

5.7.3 Représentation d'état

Les systèmes linéaires sont un outil important en automatique. Dans ce cas on considère souvent des systèmes où l'entrée est un vecteur fonction du temps et non un scalaire. Soit $u(t)$ cette entrée. Elle agit sur les sorties du système par une action intermédiaire sur l'état de ce système. On peut dire que les composantes du vecteur d'état d'un système représentent les informations qu'il faut connaître sur le passé de ce système pour pouvoir calculer l'évolution future du système en fonction des commandes qui lui seront appliquées. On a ainsi les équations

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t) \text{ équation de transition} \\
 y(t) &= Cx(t) + Du(t) \text{ équation de mesure}
 \end{aligned} \tag{168}$$

Un filtre récursif peut se représenter en utilisant ce formalisme: $u(t)$ est alors un scalaire, $x(t)$ un

vecteur à p composantes, $y(t)$ est un scalaire A est une matrice de dimension p et s'écrit alors en fonction des coefficients du polynôme $A(z)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a(1) & -a(2) & \dots & \dots & \dots & \dots & -a(p-1) & -a(p) \end{bmatrix} \quad (169)$$

et les autres matrices sont

$$\begin{aligned} B &= [1, 0, \dots, 0]^T \text{ vecteur de } p \text{ lignes} \\ C &= [1, 0, \dots, 0] \text{ vecteur ligne de } p \text{ colonnes} \\ D &= 0 \end{aligned} \quad (170)$$

Un système linéaire représenté sous forme d'état et invariant dans le temps est stable si les valeurs propres de la matrice de transition A ont toutes un module inférieur à un. Un calcul du déterminant de $A - I\lambda$ montre que ces valeurs propres sont égales aux racines du polynôme $z^p A(z)$. C'est la même condition de stabilité que celle donnée dans le cas des filtres récurrents.

Un problème spécifique des filtres récurrents est liée au fait que les calculs sont effectués en précision finie et que le système est bouclé: il peut apparaître des phénomènes oscillants dus à ce bouclage et à la quantification.

6 La transformée de Fourier discrète

Les représentations de signaux et de filtres sous la forme de transformées de Fourier et de transformées en z sont des outils théoriques. Ils ne peuvent être utilisés que si les données étudiées ont une représentation formelle. C'est le cas d'un filtre linéaire non récursif ou d'un signal sinusoïdal. Dans les études en traitement du signal, on est amené à représenter des signaux dont la transformée ne peut pas s'écrire comme une formule dépendant d'un petit nombre de paramètres. Même dans le cas où une écriture formelle existe, on a souvent besoin de représenter la transformée de Fourier d'un signal ou la réponse en fréquence d'un filtre. On utilisera pour cela les outils informatiques.

L'utilisation de techniques numériques pour effectuer un calcul de transformée de Fourier suppose que le nombre de données à traiter soit fini et que le nombre de fréquences pour lesquelles on calcule la transformée soit aussi fini. Pour conserver la même quantité d'informations, on calculera autant de données dans le domaine des fréquences qu'il y a d'échantillons du signal dans le domaine temporel. C'est l'objectif de la transformée de Fourier discrète.

6.1 La transformée de Fourier discrète

Soit le signal échantillonné $x(t)$ nul en dehors de l'intervalle $0, \dots, T-1$ et $X'(e^{j\theta})$ sa transformée de Fourier. On rend ce signal périodique en le reproduisant après translation de $T, 2T, 3T$, etc...

Pour tout n pour tout $0 \leq t \leq T-1$

$$y(t + nT) = x(t) \quad (171)$$

La transformée de Fourier $Y(e^{j\theta})$ de $y(t)$ est nulle sauf aux fréquences multiples de $2\pi/T$. Comme c'est la transformée de Fourier d'un signal échantillonné, elle est aussi périodique de période 2π si on prend le pas d'échantillonnage égal à un. La connaissance de $Y(e^{j\theta})$ aux fréquences multiples de $2\pi/T$ suffit donc pour caractériser le signal périodisé $y(t)$ et donc le signal original $x(t)$. La formule donnant $Y(e^{j\theta})$ pour les valeurs de $\theta = 2k\pi/T$ est ainsi

$$Y(e^{2\pi j \frac{k}{T}}) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-2\pi j \frac{kt}{T}} \quad (172)$$

La notation $Y(e^{2\pi j \frac{k}{T}})$ est commode pour établir un lien avec la transformée en z . Nous la remplacerons par la notation moins lourde

$$X(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-2\pi j \frac{kt}{T}} \quad (173)$$

C'est le produit d'une matrice par un vecteur qui transforme le vecteur $x(t)$ en un vecteur $X(k)$ de même dimension.

6.2 La transformée inverse

A partir de l'amplitude complexe des harmoniques on peut reconstituer le signal périodique $y(t)$ et donc le signal $x(t)$ pour $0 \leq t \leq T-1$. On a donc

$$x(t) = \sum_{k=0}^{T-1} X(k) e^{2\pi j \frac{kt}{T}} \quad (174)$$

On peut vérifier directement la validité de cette reconstruction en remplaçant $X(k)$ par sa valeur (173). Si on calcule $x'(t)$

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{T-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x(n) e^{-2\pi j \frac{kn}{T}} \right] e^{2\pi j \frac{kt}{T}} \quad (175)$$

En échangeant l'ordre des sommations, on obtient

$$x'(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x(n) \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi j \frac{k(t-n)}{T}} \quad (176)$$

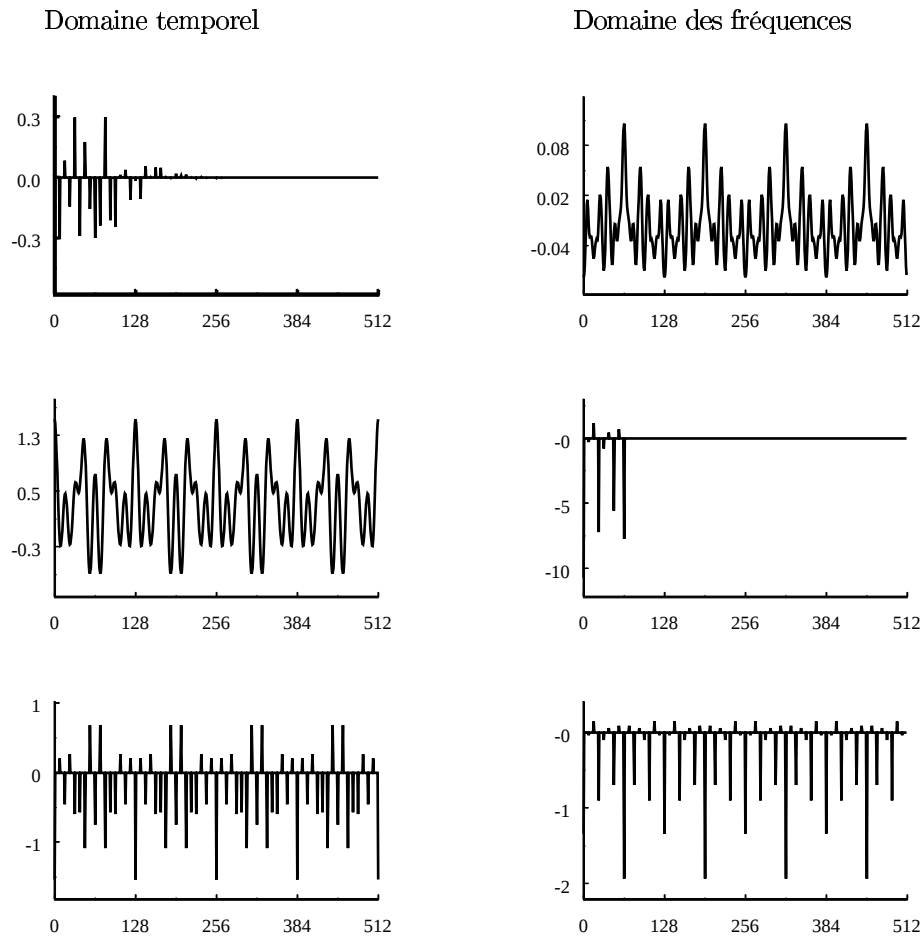


Figure 51: Illustration de l'aspect périodique et échantillonné des signaux et de leurs transformées de Fourier discrètes. Sur la première ligne le signal est échantillonné dans le domaine temporel, sa transformée de Fourier est périodique. Sur la deuxième ligne, le signal temporel est périodique, sa transformée de Fourier est composée uniquement d'harmoniques, elle est donc échantillonnée. Sur la troisième ligne, le signal temporel est échantillonné, sa transformée est périodique et comme la transformée est échantillonnée car c'est une transformée de Fourier discrète, le signal temporel est lui aussi périodique: il y a échantillonnage et périodicité à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine des fréquences

Or, d'après les propriétés des séries géométriques

$$t \neq n : \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi j \frac{k(t-n)}{T}} = 0 \quad (177)$$

$$t = n : \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi j \frac{k(t-n)}{T}} = T \quad (178)$$

Le signal ainsi reconstruit est bien égal au signal original

$$x'(t) = x(n) \quad (179)$$

Remarque: La transformée de Fourier discrète n'est pas symétrique de son inverse. Il est parfois commode de remplacer dans la transformée directe le facteur $1/T$ par $(1/T)^{1/2}$ et d'introduire le même facteur dans la transformée inverse. L'opérateur de transformation est alors une matrice unitaire, son inverse est égale à la transposée de sa conjuguée.

6.3 Les propriétés de la transformée de Fourier discrète

Toutes les propriétés de la transformée de Fourier et de la transformée en z sont conservées, en particulier la transformée d'une convolution discrète est un produit. Toutefois l'utilisation de cette propriété nécessite quelques précautions. En effet il ne faut pas oublier que les séquences pour lesquelles on calcule les transformées de Fourier discrètes sont périodiques et tenir compte de ce fait dans les calculs. Soit la convolution discrète

$$y(t) = \sum_{n=0}^{T-1} x(n)h(t-n) \quad (180)$$

C'est une *convolution circulaire*, l'indice $t-n$ est calculé modulo T . Si $X(k)$, $H(k)$ et $Y(k)$ sont les transformées des séquences $x(t)$, $h(t)$ et $y(t)$, on a

$$Y(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y(t) e^{-2\pi j \frac{kt}{T}} \quad (181)$$

$$Y(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n=0}^{T-1} x(n)h(t-n) e^{-2\pi j \frac{kt}{T}} \quad (182)$$

On introduit artificiellement

$$e^{-2\pi j \frac{kn}{T}} e^{2\pi j \frac{kn}{T}} = 1 \quad (183)$$

$$Y(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{n=0}^{T-1} x(n)h(t-n) e^{-2\pi j \frac{k(t-n)}{T}} e^{-2\pi j \frac{kn}{T}} \quad (184)$$

$$Y(k) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x(n) e^{-2\pi j \frac{kn}{T}} \left[\sum_{t=0}^{T-1} h(t-n) e^{-2\pi j \frac{k(t-n)}{T}} \right] \quad (185)$$

On pose $m = t - n$, et on peut écrire, du fait de la périodicité des signaux

$$Y(k) = \frac{1}{T} \left[\sum_{n=0}^{T-1} x(n) e^{-2\pi j \frac{kn}{T}} \right] \left[\sum_{m=0}^{T-1} h(m) e^{-2\pi j \frac{km}{T}} \right] \quad (186)$$

$$Y(k) = TX(k)Y(k) \quad (187)$$

Ce résultat n'est valable que pour les convolutions circulaires. Pour l'étendre au cas des signaux de durée finie, il faut s'assurer que la somme des durées T_x et T_h pendant lesquels les deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ sont non nuls est inférieure à T . En effet, dans ce cas la durée T_y du résultat de la convolution sera égale à $T_x + T_h - 1$. Ceci est illustré sur les exemples de la figure 52.

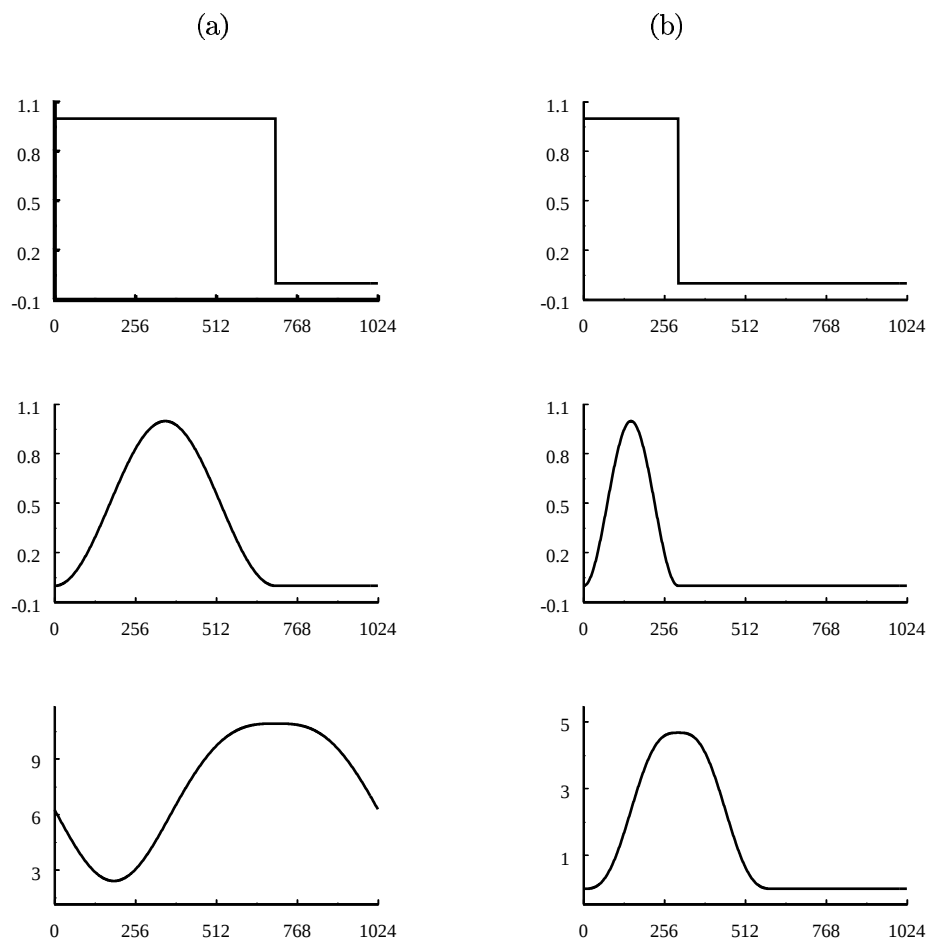


Figure 52: Illustration du repliement dans le domaine temporel obtenu lorsqu'on calcule une convolution en utilisant une transformée de Fourier discrète (signaux de la colonne a). Pour que l'effet du repliement n'apparaisse pas il faut dans ce cas que la somme des durées des deux signaux soit inférieure à durée de la fenêtre utilisée pour le calcul de transformée de Fourier (signaux de la colonne b)

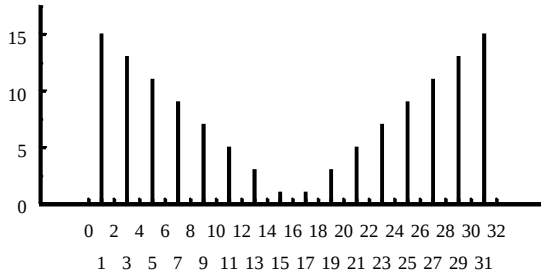


Figure 53: Duplication des données et intercalage de zéros permettant d'établir le lien entre la transformée en cosinus et la transformée de Fourier

6.4 La transformée en cosinus

Pour information nous donnerons la formule de la transformée en cosinus, utilisée en codage de sons (MP3) et d'images (MPEG2), qui n'est qu'un cas particulier de la transformée de Fourier où on construit à partir d'un signal $x(t)$ de longueur T un signal $y(t)$ de longueur $4T$ symétrique dont les échantillons d'ordre pair sont nuls, ce qui se traduit par les formules suivantes: Pour $k = 0, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} y(2k) &= y(-2k) = 0 \\ y(2k+1) &= y(-2k-1) = x(k) \end{aligned} \quad (188)$$

Dans ce cas le calcul de la transformée de Fourier discrète de $y(t)$ se réduit au calcul de T valeurs.

Pour $k = 0, \dots, N - 1$:

$$X(k) = \frac{2}{T} c(k) \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \cos\left(\pi \frac{(2t+1)k}{2N}\right) \quad (189)$$

où $c(k) = 2^{-1/2}$ si $k = 0$ et $c(k) = 1$ si $k \neq 0$.

La transformée inverse est Pour $t = 0, \dots, N - 1$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{T-1} c(k) X(k) \cos\left(\pi \frac{(2t+1)k}{2N}\right) \quad (190)$$

6.5 L'algorithme de calcul de transformée de Fourier rapide

Cet algorithme célèbre a été inventé par Cooley et Tuckey, ingénieurs dans le centre de recherche d'IBM au début des années 1960. Il a eu, du fait de son efficacité, un impact considérable sur le développement des applications en traitement numérique des signaux. Un calcul de transformée de Fourier discrète est un calcul de produit d'une matrice par un vecteur. Il nécessite donc T^2 multiplications/additions de nombres complexes. Si on suppose qu'un calculateur effectue 10^9 opérations par seconde, un calcul de transformée sur un signal de $T = 10^3$ échantillons nécessitera 10^{-3} s. Un calcul sur une image de taille $T \times T = 10^6$ nécessitera T^4 soit 10^{12} opérations et une quinzaine de minutes de calcul. Si on envisage de traiter des données dans un domaine à trois dimensions (sur des vecteurs de taille $T \times T \times T$) il faudrait alors effectuer T^6 soit 10^{18} opérations, ce qui nécessite quelques dizaines d'années. La transformée de Fourier rapide réduit considérablement le nombre d'opérations à effectuer: au lieu d'effectuer T^2 opérations il suffira d'en faire $T \log_2 T$. Dans les trois exemples précédents on aura à faire 10^4 , 2×10^7 et 3×10^{10} opérations ce qui nécessitera respectivement 10^{-5} s, 2×10^{-2} s et 30s ...

Pour expliquer cet algorithme, nous utiliserons la récursivité en montrant que le calcul d'une transformée de Fourier de taille T se ramène au calcul de deux transformées de Fourier de taille $T/2$ suivi de $T/2$ multiplications. On veut calculer

Pour $k = 0, \dots, T - 1$

$$X(k) = \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \exp(-2\pi j \frac{k.t}{T}) \quad (191)$$

On pose $t = 2n$ si t est pair et $t = 2n + 1$ si t est impair. $X(k)$ s'écrit alors, en posant $N = T/2$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n) \exp(-2\pi j \frac{k.2n}{T}) + \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1) \exp(-2\pi j \frac{k.(2n+1)}{T}) \quad (192)$$

Nommons les séquences

$$t = 0, \dots, 2N - 1 : x_{2N}(t) = x(t) \quad (193)$$

$$n = 0, \dots, N - 1 : x_N^o(n) = x(2n) \quad (194)$$

$$n = 0, \dots, N - 1 : x_N^i(n) = x(2n+1) \quad (195)$$

$$k = 0, \dots, 2N - 1 : X_{2N}(k) = X(k) \quad (196)$$

Avec ces notations, l'éq. (192) devient

$$X_{2N}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_N^o(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) + \sum_{n=0}^{N-1} x_N^i(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) \exp(-2\pi j \frac{k}{2N}) \quad (197)$$

Dans la deuxième sommation du membre de droite de l'équation (197), le facteur $\exp(-2\pi j \frac{k}{2N})$ ne dépend pas de n . On a donc l'écriture

Pour $k = 0, \dots, 2N - 1$

$$X_{2N}(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_N^o(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) \right] + \exp(-2\pi j \frac{k}{2N}) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_N^i(n) \exp(-2\pi j \frac{k.n}{N}) \right] \quad (198)$$

Si

$$0 \leq k \leq N - 1, \quad (199)$$

on reconnaît dans les deux expressions entre crochets les transformées de Fourier discrètes des séquences des échantillons de numéro pair $x_N^o(n)$ et des échantillons de numéro impair $x_N^i(n)$ que nous nommons $X_N^o(k)$ et $X_N^i(k)$

Pour $k = 0, \dots, N - 1$

$$X_{2N}(k) = X_N^o(k) + \exp(-\pi j \frac{k}{N}) X_N^i(k) \quad (200)$$

Lorsque $N \leq k \leq 2N - 1$, on peut écrire

$$k = \ell + N \quad (201)$$

et remarquer que

$$\exp(-\pi j \frac{k}{N}) = -\exp(-\pi j \frac{\ell}{N}) \quad (202)$$

L'équation (198) devient alors

Pour $\ell = 0, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned} X_{2N}(\ell + N) &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_N^o(n) \exp(-2\pi j \frac{(\ell + N).n}{N}) \right] \\ &+ \exp(-2\pi j \frac{\ell + N}{2N}) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_N^i(n) \exp(-2\pi j \frac{(\ell + N).n}{N}) \right] \end{aligned} \quad (203)$$

et, en remarquant que

$$\exp(-2\pi j \frac{(\ell + N).n}{N}) = \exp(-2\pi j \frac{\ell.n}{N}) \quad (204)$$

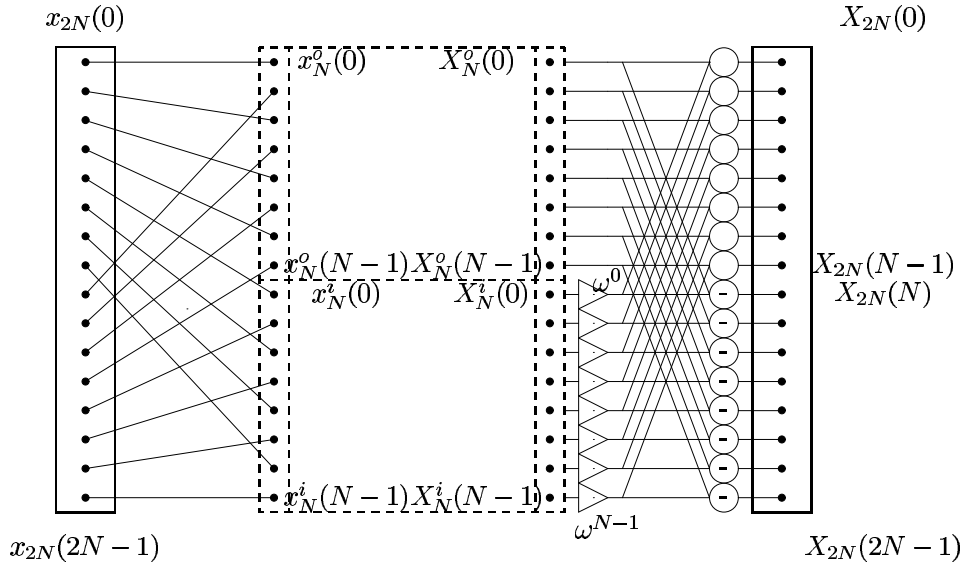


Figure 54: Schéma de l'enchaînement des calculs de la transformée de Fourier rapide

$$\exp(-2\pi j \frac{(\ell + N)}{2N}) = -\exp(-\pi j \frac{\ell \cdot n}{N}) \quad (205)$$

en tenant compte de (200), on a une écriture analogue à l'éq. (200)
Pour $\ell = 0, \dots, N-1$

$$X_{2N}(\ell + N) = X_N^o(\ell) - \exp(-\pi j \frac{\ell}{N}) X_N^i(\ell) \quad (206)$$

On peut changer le nom de la variable ℓ en k et regrouper les deux équations (200) et (206)
Pour $k = 0, \dots, N-1$

$$X_{2N}(k) = X_N^o(k) + \exp(-\pi j \frac{k}{N}) X_N^i(k) \quad (207)$$

$$X_{2N}(k + N) = X_N^o(k) - \exp(-\pi j \frac{k}{N}) X_N^i(k) \quad (208)$$

Les calculs correspondants sont représentés dans la figure 54. Cette formulation se traduit directement par une implémentation récursive. Toutefois la programmation de la plupart des processeurs est fondée sur une implémentation différente. On commence par effectuer toutes les opérations de réarrangement des données : Pour un vecteur de longueur T , construction d'un tableau de données d'adresse paire et d'un tableau de données d'adresse impaire de longueur $T/2$, ce rangement étant reproduit pour les deux moitiés de tableau de taille $T/2$, puis les quatre quarts de tableau de taille $T/4$, etc... Ceci revient à ranger la données $x(t)$ à l'adresse obtenue en lisant le code binaire de t en sens inverse comme on peut le voir dans la table 1. On effectue ensuite la même opération sur chacun des deux tableaux. Ensuite on effectue séquentiellement les multiplications par les nombres complexes de la forme $\exp 2\pi j \frac{kn}{N}$ pour calculer les $T/2$ transformées de Fourier de taille 2, puis les $T/4$ transformées de taille 4, et ainsi de suite jusqu'à obtenir les 2 transformées de Fourier de taille $T/2$ et finalement la transformée de Fourier de taille T .

6.5.1 Calcul du nombre d'opérations à effectuer

A la dernière étape du calcul on dispose du résultat de deux transformées de Fourier de taille $N = T/2$. Pour en déduire la transformée de taille T , il faut effectuer $T/2$ multiplications, $T/2$ additions et $T/2$ soustractions. A l'étape précédente, on dispose de quatre transformées de Fourier de taille $T/4$ et on en déduit deux transformées de taille $T/2$. Pour chacune d'elles il faut effectuer $T/4$ multiplications soit au total $T/2$ multiplications. On voit ainsi que pour chacune des étapes (où la taille de vecteurs est $T, T/2, \dots, T/2^m, \dots, 4, 2, 1$ et où le nombre de vecteurs est $1, 2, 4, \dots, T/2^m, \dots, T/2, T$), il est nécessaire d'effectuer $2^{m-1} \times \frac{T}{2^m}$ multiplications. Il y a au total $\log_2 T$ étapes et il faut donc effectuer $\frac{T}{2} \log_2(T)$ multiplications.

Tableau 1: Réordonnancement des données préalable dans le calcul de la transformée de Fourier rapide

abcd	bcda	cdba	dcba
0000	0000	0000	0000
0001	0010	0100	1000
0010	0100	1000	0100
0011	0110	1100	1100
0100	1000	0010	0010
0101	1010	0110	1010
0110	1100	1010	0110
0111	1110	1110	1110
1000	0001	0001	0001
1001	0011	0101	1001
1010	0101	1001	0101
1011	0111	1101	1101
1100	1001	0011	0011
1101	1011	0111	1011
1110	1101	1011	0111
1111	1111	1111	1111

6.5.2 Remarques pratiques

L'algorithme de transformée de Fourier rapide remplace une succession d'additions par une succession de multiplications. Comme les résultats de multiplications sont tronqués, il y a donc une perte de précision. Si une transformée de Fourier est utilisée de nombreuses fois pour traiter des données de même taille, il ne faut pas oublier de calculer au préalable et de ranger en mémoire les exponentielles complexes $\exp 2\pi j \frac{kt}{T}$ pour éviter de les recalculer à chaque appel, ce qui peut prendre un temps de calcul important. On peut gagner quelques étapes en tenant compte d'éventuelles symétries des données.

6.6 Les limitations en résolution de la transformée de Fourier discrète

La limitation de la durée des signaux dans le domaine temporel et l'échantillonnage des données dans le domaine des fréquences limite la précision qu'on peut attendre dans la mise en œuvre de cette méthode d'analyse, par exemple pour mesurer la fréquence d'une sinusoïde de fréquence ω_0 .

Considérons tout d'abord la limitation en temps des signaux. Au lieu d'observer $x(t) = e^{j\omega t}$ sur une durée infinie, on l'observe sur une durée limitée T . Si

$$\begin{aligned} t < 0 & : g(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq T-1 & : g(t) = 1 \\ T \leq t & : g(t) = 0 \end{aligned} \quad (209)$$

on a

$$y(t) = g(t)x(t) \quad (210)$$

et dans le domaine des fréquences nous avons une convolution de fonctions périodiques d'une variable continue (pour le moment, le calcul est fait pour toutes les fréquences et pas seulement celles pour lesquelles la transformée de Fourier discrète est calculée)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\nu)G(\omega - \nu)d\nu \quad (211)$$

Comme $X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ et

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin \omega T/2}{\sin \omega/2} e^{-j\omega(T-1)/2} \\ G(0) &= T \end{aligned} \quad (212)$$

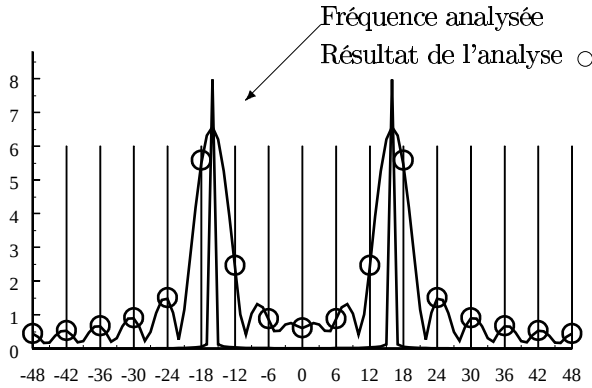


Figure 55: Illustration de la limitation de résolution en fréquence due à l'utilisation de la transformée de Fourier discrète: le signal $x(t)$ analysé est une sinusoïde à la fréquence ω , la transformée de Fourier étant une impulsion qui n'est pas un multiple de $2\pi/T$, l'effet de la limitation en durée se traduit par l'étalement $Y(\omega)$ fonction du type "sinc", ensuite l'échantillonnage en fréquence se traduit par la fonction échantillonnée

$$Y(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)T/2}{\sin(\omega - \omega_0)/2} e^{-j(\omega - \omega_0)(T-1)/2} \quad (213)$$

L'effet du déphasage linéaire traduit un retard connu sur le signal, ce qui n'a pas de conséquence. Par contre, l'effet de limitation de durée se traduit par la modification de la forme de la transformée de Fourier, l'impulsion de Dirac devient une fonction qui ressemble à un sinus cardinal. La deuxième opération est l'échantillonnage en fréquence avec un pas $2\pi/T$, ce qui se traduit par un échantillonnage de $Y(\omega)$. Ce type de défaut n'apparaît pas lorsque la durée de la fenêtre est un multiple de la période de la sinusoïde analysée. Il est rare qu'en pratique on puisse se mettre dans ces conditions, sauf pour l'analyse des signaux musicaux. La figure 55 montre l'exemple du résultat d'une analyse spectrale de ce type appliquée à une sinusoïde pure. On peut, dans la mesure où les interférences entre différentes sinusoïdes sont négligeables, améliorer la résolution en interpolant la transformée discrète par la fonction $G(\omega)$. Cette interpolation peut se faire aussi en augmentant le nombre d'échantillons du signal, en le complétant par des échantillons à zéro.

6.7 Les fenêtres d'analyse spectrale

On peut tenter de pallier un des défauts précédents, l'interférence entre différentes fréquences en utilisant une fenêtre de pondération. En effet, une des causes des défauts est la limitation en temps du signal qui peut se traduire par une discontinuité brusque du signal. La discontinuité se traduit par un étalement de l'impulsion de Dirac sous la forme d'un signal décroissant en $1/\omega$. On peut atténuer cette discontinuité en multipliant dans le domaine temporel le signal analysé par une fonction de pondération qui remplacera la fenêtre de pondération implicite $g(t)$. Une fenêtre couramment utilisées est la fenêtre de Hamming

$$g_H(t) = 0.54 + 0.46 \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \quad (214)$$

On distingue dans cette fenêtre le "lobe principal" (l'arche centrale d'amplitude importante) et les "lobes secondaires" (les oscillations). Dans le cas de la fenêtre de Hamming, le lobe principal est deux fois plus large que dans le cas de la fenêtre rectangulaire. On peut atténuer l'amplitude de ces oscillations en utilisant une fenêtre de pondération, par exemple la fenêtre de Hamming (fig. 44).

$$t < -T/2 : h'(t) = 0$$

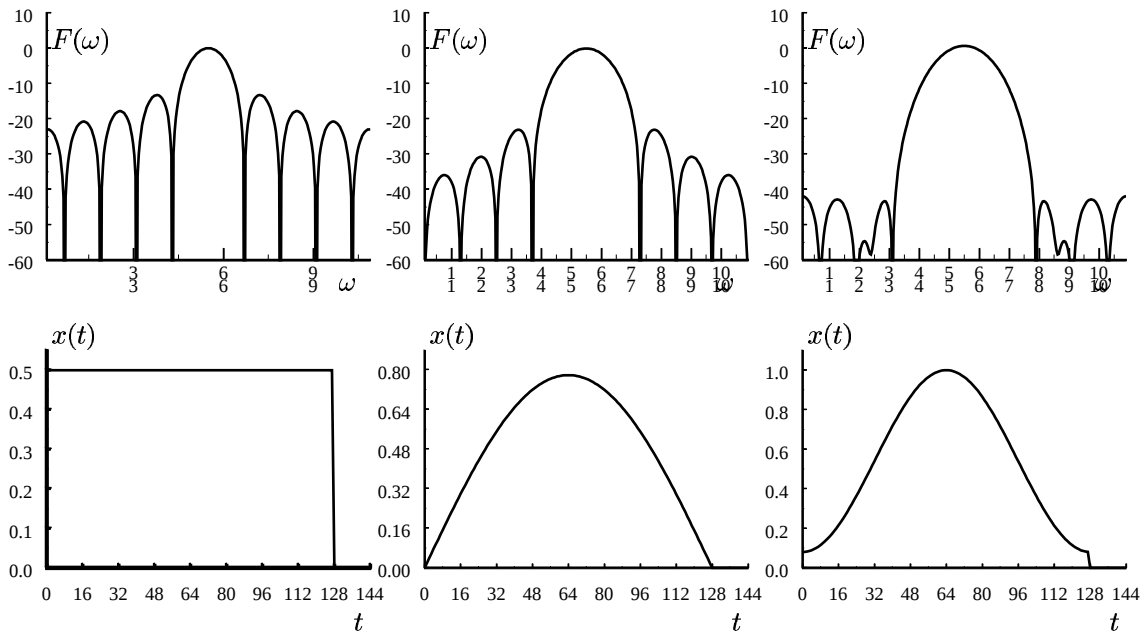


Figure 56: Lobe principal et lobes latéraux des fenêtres rectangulaire, de Papoulis et de Hamming (échelle logarithmique)

$$\begin{aligned}
 -T/2 \leq t < T/2 & : h'(t) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi \frac{t}{T}) \\
 T/2 \leq t & : h'(t) = 0
 \end{aligned} \tag{215}$$

Cette atténuation des oscillations parasites se fait au détriment de la largeur de la bande de transition (qui est doublée dans le cas présent). Il existe d'autres formes de fenêtres de pondérations qui seront décrites dans le chapitre consacré à l'analyse spectrale. Une forme intéressante de fenêtre est la fenêtre de Papoulis.

$$\begin{aligned}
 t < -T/2 & : h'(t) = 0 \\
 -T/2 \leq t < T/2 & : h'(t) = \cos(\pi \frac{t}{T}) \\
 T/2 \leq t & : h'(t) = 0
 \end{aligned} \tag{216}$$

6.8 Présentation graphique des résultats de la transformée de Fourier discrète

Les programmes calculant la transformée de Fourier discrète calculent des amplitudes pour des fréquences comprises entre la fréquence zéro et la fréquence d'échantillonnage (ω_e). Il est souvent préférable de représenter graphiquement ces données entre $[-\omega_e/2, \omega_e/2]$. (figure 57).

On peut aussi être amené à modifier le signal à analyser dans le domaine temporel. par exemple, si un signal $x(t)$ est non causal, défini sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$, il peut être utile de translater les échantillons donnés pour $t < 0$ au delà de $T/2$ (figure 57). Toutefois il ne faut pas oublier d'effectuer les opérations similaires en sens inverse lors du calcul de la transformée de fourier inverse.

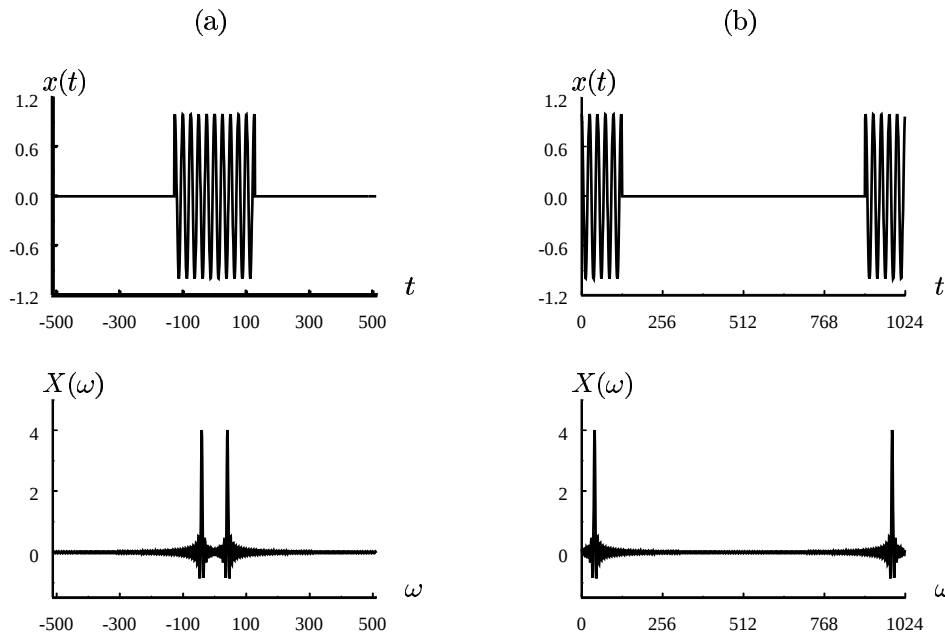


Figure 57: Illustration de la représentation des signaux et de leur transformée de Fourier avant et après centrage

7 Signaux aléatoires

Un signal aléatoire est un signal $x(t)$ qui, comme son nom l'indique, varie aléatoirement en fonction du temps, en particulier sa valeur à un instant t ne peut pas être prédite; c'est par exemple le bruit de fond enregistré par un appareil de mesure. (On emploie aussi le terme "processus stochastique".)

Le fait qu'on étudie nécessairement des signaux qui ne sont pas parfaitement prévisibles nous amène à étudier les caractéristiques principales des signaux aléatoires et les bases de probabilités nécessaires à cette étude.

7.1 Les principales notions de probabilités utilisées

Une variable aléatoire x est caractérisée par sa densité de probabilité $p(x)$ dont les caractéristiques les plus utiles en traitement du signal sont les suivantes

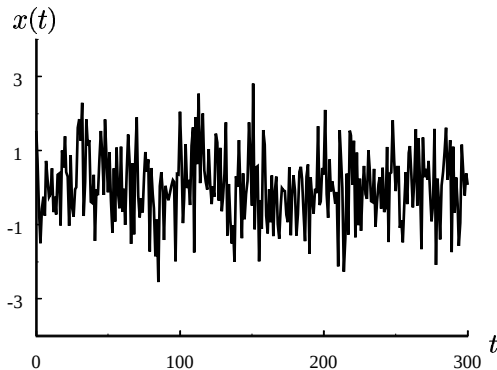


Figure 58: Exemple de signal aléatoire comme un bruit de mesure

La moyenne ou moment du premier ordre

$$m = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (217)$$

On peut en donner une estimation à partir de N réalisations $x(n)$ de la variable aléatoire x

$$m' = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (218)$$

Dans un certain nombre d'applications en traitement du signal il est préférable de traiter des signaux de moyenne nulle, et donc de créer à partir de la variable aléatoire étudiée x une deuxième variable aléatoire $y = x - m$ qui est centrée (dont la moyenne est nulle).

Moment du deuxième ordre, variance et corrélation Nous supposons que les variables sont centrées L'outil de base pour caractériser les signaux aléatoires est le moment du deuxième ordre d'un couple de variables aléatoires. Le moment du deuxième ordre d'une variable aléatoire centrée est sa variance (carré de l'écart-type)

$$\sigma^2 = E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx \quad (219)$$

On peut l'estimer à partir de N réalisations

$$\sigma'^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \quad (220)$$

Cette variance caractérise la dispersion autour de la valeur moyenne (ici autour de zéro). Pour caractériser la relation entre deux variables aléatoires, on étudie leur corrélation qui s'écrit en fonction de la densité de probabilité conjointe du couple de variables aléatoires $p(x, y)$

$$E(xy) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy \quad (221)$$

On en déduit le coefficient de corrélation

$$r = \frac{E(xy)}{\sqrt{E(x^2)E(y^2)}} \quad (222)$$

r est compris entre -1 et 1 . Si $r = 0$ on dit que les variables x et y sont orthogonales. Si $r = \pm 1$ il y a dépendance linéaire entre x et y . Si les variables aléatoires sont centrées et indépendantes, alors $p(x, y)$ se factorise

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y) \quad (223)$$

et $E(xy) = 0$.

On peut estimer $E(xy)$ à partir d'un nombre fini d'échantillons par la formule suivante

$$E(xy) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n) \quad (224)$$

Les estimations de $E(x)$, $E(x^2)$ et $E(xy)$ sont d'autant meilleures que N est grand; ces estimations sont elles-mêmes des variables aléatoires dont l'écart-type décroît lentement, (comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$) quand N augmente. Cette corrélation $E(xy)$ joue un rôle fondamental en traitement du signal.

Les variables aléatoires gaussiennes centrées

Ces variables sont fondamentales pour deux types de raisons: d'une part, leur étude théorique met en évidence des propriétés très utiles en pratique, en particulier leurs moments du deuxième ordre suffit à les caractériser. De plus, elles représentent bien les signaux aléatoires qu'on peut mesurer dans le monde physique.

Leur densité de probabilité s'écrit

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} \quad (225)$$

Dans le cas d'un couple de variables aléatoires conjointement gaussiennes

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp -\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2rxy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \quad (226)$$

Les moments de ces variables sont

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sigma_x^2 \\ E(y^2) &= \sigma_y^2 \\ E(xy) &= r\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \quad (227)$$

Si $r = 0$, $p(x, y)$ s'écrit sous la forme d'un produit

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y) \quad (228)$$

Deux variables aléatoires gaussiennes dans leur ensemble et orthogonales sont indépendantes.

7.2 Les résultats principaux concernant les signaux aléatoires réels à temps continu

Nous ne ferons pas une étude approfondie de ces signaux qui demande une approche mathématique assez délicate, nous contentant d'énoncer les résultats les plus importants en pratique.

7.2.1 Moyenne

La moyenne est calculée à chaque instant t , soit $E[x(t)]$. Si cette moyenne ne dépend pas de t , on dit que le signal est stationnaire au premier ordre. Si le signal est "ergodique" (propriété qui est généralement admise), on peut remplacer le calcul sur différentes réalisations à un instant t donné par une moyenne temporelle.

$$E[x(t)] = \frac{1}{2T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (229)$$

Il est en général préférable de retrancher la moyenne du signal étudié pour ensuite étudier un signal centré. Dans la suite, nous supposons que les signaux sont effectivement centrés.

7.2.2 Fonction d'autocorrélation

On s'intéresse aux corrélations entre les valeurs de $x(t)$ prises à deux instants différents t_1 et t_2 ,

$$\rho(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad (230)$$

Si $x(t)$ est un signal stationnaire au deuxième ordre, sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence $(t_1 - t_2)$.

$$r(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (231)$$

L'inégalité de Schwarz permet de montrer que

$$r^2(\tau) \leq E[x^2(t)]E[x^2(t+\tau)] \quad (232)$$

$$r^2(\tau) \leq \sigma^2 = r(0) \quad (233)$$

La fonction d'autocorrélation passe par son maximum pour $\tau = 0$. Si on calcule

$$r(-\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] \quad (234)$$

et qu'on pose

$$u = t - \tau \quad (235)$$

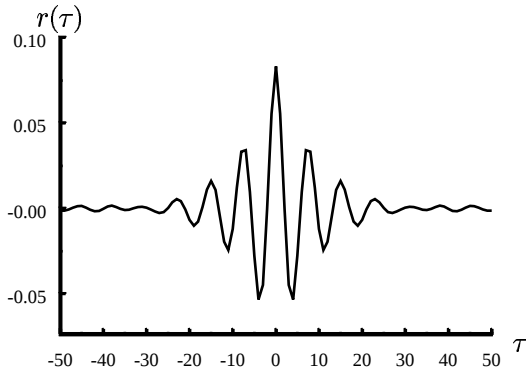


Figure 59: Exemple de fonction d'autocorrélation

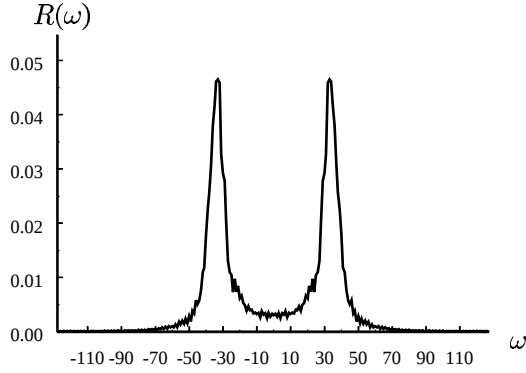


Figure 60: Exemple de densité spectrale

$$r(-\tau) = E[x(u + \tau)x(u)] = r(\tau) \quad (236)$$

La fonction d'autocorrélation est une fonction symétrique. C'est aussi une fonction définie positive: dans la mesure où une fonction $f(t)$ autorise le calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)r(t-t')f(t')dt dt' \geq 0, \quad (237)$$

cette intégrale est toujours positive ou nulle.

En général cette fonction d'autocorrélation tend vers zéro lorsque τ tend vers l'infini si $x(t)$ est de moyenne nulle.

7.2.3 Densité spectrale

Un problème important dans de nombreuses applications est l'étude de la répartition en fréquences d'un signal aléatoire: une réalisation de ce signal $x(t)$ a une transformée de Fourier $X(\omega)$ qu'on ne peut théoriquement pas calculer mais dont on peut trouver une estimation $\hat{X}(\omega)$. On cherche à calculer $E[|X(\omega)|^2]$, répartition moyenne de l'énergie du signal en fonction de la fréquence. Nous ne donnerons pas ici un développement rigoureux, ce qui serait excessivement fastidieux pour un cours élémentaire mais seulement une forme sommaire de ce développement qui traduit bien ce qu'on peut faire en pratique dans les applications. Une estimation de la transformée de Fourier d'une réalisation du processus aléatoire $x(t)$ est

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \exp -j\omega t dt \quad (238)$$

$$E|\hat{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T \int_{-T}^T x(t)x(t') \exp -j\omega(t-t') dt dt' \right] \quad (239)$$

Nous supposons qu'on peut commuter les sommations et les calculs de moyenne,

$$E|\hat{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[x(t)x(t')] \exp -j\omega(t-t') dt dt' \quad (240)$$

et que le signal est stationnaire, ce qui fait apparaître la fonction d'autocorrélation $r(t-t')$

$$E|\hat{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T r(t-t') \exp -j\omega(t-t') dt dt' \quad (241)$$

En posant

$$u = t - t' \quad (242)$$

$$v = t + t' \quad (243)$$

cette équation devient

$$E|\hat{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T+|v|}^{T-|v|} r(u) \exp -j\omega(u) du dv \quad (244)$$

Si on admet, en éludant les problèmes de convergence, qu'on peut calculer la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, soit $R(\omega)$

$$E|\hat{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R(\omega) dv = R(\omega) \quad (245)$$

La valeur moyenne de la répartition de l'énergie en fonction de la fréquence est donnée par la transformée de Fourier $R(\omega)$ de la fonction d'autocorrélation.

On a ainsi deux possibilités: soit on se donne une estimation de la transformée de chaque réalisation et le carré de son module, $|\hat{X}(\omega)|$, et on calcule une moyennes sur différentes réalisations pour estimer la densité spectrale; soit on calcule la fonction d'autocorrélation du signal (ce qui peut se faire sur une seule réalisation si le signal est ergodique) et on en prend la transformée de Fourier.

On peut considérer qu'un signal aléatoire $x(t)$ admet une décomposition en fréquence sous la forme d'une somme infinie de sinusoides où pour chaque fréquence

$$X(\omega) = \rho(\omega) \exp[j\varphi(\omega)] \quad (246)$$

$\rho(\omega)$ est une variable aléatoire positive ou nulle telle que sa moyenne est égale à la racine carrée de la densité spectrale $R_x(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ est une variable aléatoire équirépartie dans $[-\pi, \pi]$.

7.2.4 Cas des variables aléatoires gaussiennes

Si $x(t)$ est une variable aléatoire gaussienne et si les n-uplets de variables aléatoires

$$x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$$

sont gaussiens dans leur ensemble, si $x(t)$ est un signal stationnaire non seulement aux ordres un et deux mais aussi aux ordres supérieurs à deux, alors la fonction d'autocorrélation $r(\tau)$ suffit à caractériser le signal aléatoire $x(t)$: toute l'information qu'on peut en tirer du point de vue statistique se trouve dans sa densité spectrale ou sa fonction d'autocorrélation. En particulier dans le domaine des fréquences, la densité spectrale est une quantité réelle non négative, et on ne peut pas trouver d'information sur les phases en étudiant les statistiques d'ordre deux.

7.2.5 Le bruit blanc

C'est un signal dont les valeurs mesurées à des instants différents sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres (fig. 62).

Si ce bruit est centré, sa fonction d'autocorrélation vérifie

$$\tau = 0 \quad : \quad r_b(\tau) = \sigma^2 \quad (247)$$

$$\tau \neq 0 \quad : \quad r_b(\tau) = 0 \quad (248)$$

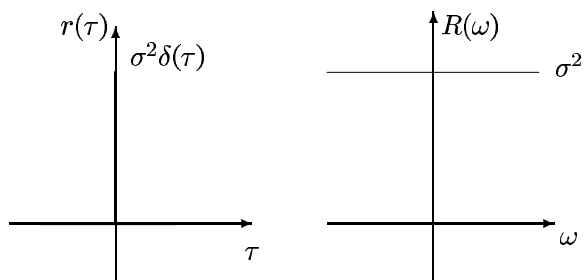


Figure 61: Autocorrélation (impulsion de Dirac) et densité spectrale (constante) théoriques d'un bruit blanc.

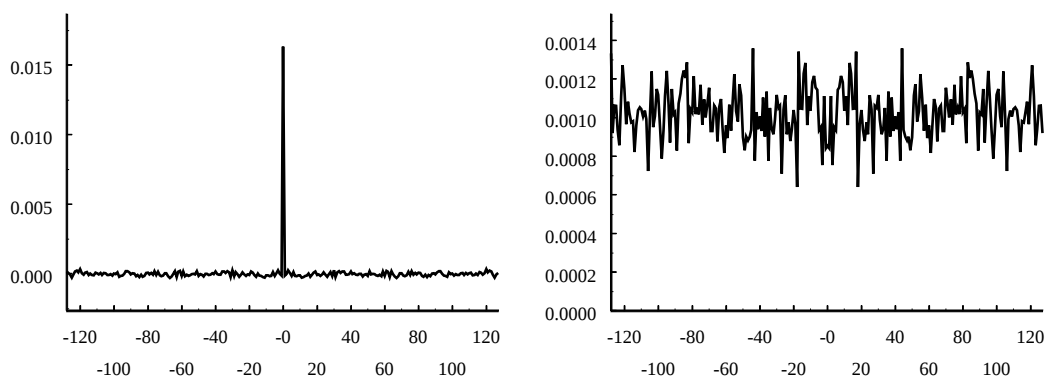


Figure 62: Autocorrélation et densité spectrale estimées d'un bruit blanc; L'estimation se fait en accumulant des résultats partiels à partir de séquences de durée finie. La variance de la densité spectrale qui est nulle en théorie est d'autant plus petite que le nombre de séquences utilisées pour son calcul est grand.

A une normalisation près, c'est une impulsion de Dirac à l'origine. La densité spectrale est sa transformée de Fourier

$$R_b(\omega) = \sigma^2 \quad (249)$$

La densité spectrale d'un bruit blanc est constante et égale à la variance du signal étudié.

Ce bruit blanc a un rôle important dans la modélisation des perturbations apportées aux mesures des signaux. En général, on fait l'hypothèse que les bruits sur lesquels on ne dispose pas d'information particulière sont des bruits blancs centrés stationnaires et gaussiens.

7.2.6 Filtrage des signaux aléatoires

Soit un signal aléatoire $x(t)$ qu'on filtre par un filtre linéaire invariant au cours du temps de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de réponse en fréquence $H(\omega)$. On connaît la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de $x(t)$, soient $r_x(\tau)$ et $R_X(\omega)$. On cherche à trouver la densité spectrale $R_Y(\omega)$ et la fonction d'autocorrélation $r_y(\tau)$ de $y(t)$ signal de sortie du filtre.

La sortie du filtre est

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du \quad (250)$$

La fonction d'autocorrélation de $y(t)$ est

$$E[y(t)y(t')] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du \int_{-\infty}^{\infty} x(u')h(t'-u')du' \right] \quad (251)$$

En édulant le problème de la commutation des calculs de moyennes et de sommations

$$E[y(t)y(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)h(t'-u')E[x(u)x(u')]dud u' \quad (252)$$

$$E[y(t)y(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)h(t'-u')r_x(u-u')dud u' \quad (253)$$

On pose $t' - t = \tau$

$$E[y(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)h(t+\tau-u')r_x(u-u')dud u' \quad (254)$$

et $u - t = -v, u' - t = -v'$

$$E[y(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v)h(v'+\tau)r_x(v-v')dv dv' \quad (255)$$

On remarque que $E[y(t)y(t+\tau)]$ ne dépend que de τ , ce qui implique la stationnarité de $y(t)$. La stationnarité implique que l'autocorrélation et la densité spectrale existent.

On remarquera aussi que $r_y(\tau)$ est un double calcul de convolution

$$r_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(v'+\tau)r_x(v-v')dv' \right] dv \quad (256)$$

ou encore

$$r_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(v')r_x(v-\tau-v')dv' \right] dv \quad (257)$$

SI $v - \tau = u$

$$r_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u+\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(v')r_x(u-v')dv' \right] du \quad (258)$$

qu'on écrira

$$r_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u+\tau)g(u)du \quad (259)$$

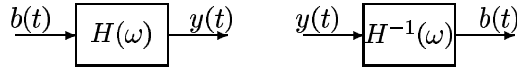


Figure 63: Représentation d'un signal $y(t)$ comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc $b(t)$; obtention de l'innovation $b(t)$ par filtrage inverse de $y(t)$

où on a posé

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v') r_x(u - v') dv' \quad (260)$$

Nous appellerons $G(\omega)$ la transformée de Fourier de $g(u)$. La transformée d'une convolution est un produit

$$G(\omega) = H(\omega) R_x(\omega) \quad (261)$$

La transformée de Fourier $R_y(\omega)$

$$R_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u + \tau) g(u) \exp -j\omega\tau du d\tau \quad (262)$$

en posant $h'(u) = h(-u)$, $H'(\omega) = \overline{H(\omega)}$

$$R_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h'(-u - \tau') g(u) \exp -j\omega\tau' du d\tau' \quad (263)$$

C'est la transformée de Fourier d'une convolution qui s'écrit donc

$$R_y(\omega) = \overline{H(\omega)} G(\omega) \quad (264)$$

En remplaçant $G(\omega)$ par sa valeur (261)

$$R_y(\omega) = \overline{H(\omega)} H(\omega) R_x(\omega) \quad (265)$$

$$R_y(\omega) = |H(\omega)|^2 R_x(\omega) \quad (266)$$

La densité spectrale de la sortie du filtre est égale à la densité spectrale de l'entrée multipliée par le carré du module de la réponse en fréquence du filtre. Ce résultat est fondamental pour un bon nombre d'applications. Il est tout à fait cohérent avec le résultat sur le filtrage des signaux déterministes pour lesquels on a

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 \quad (267)$$

7.2.7 Représentation des signaux comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc

Comme la densité spectrale (constante) d'un bruit blanc de variance σ^2 filtré par un filtre de réponse en fréquence $H(\omega)$ est

$$|R_y(\omega)|^2 = \sigma^2 |H(\omega)|^2 \quad (268)$$

on peut toujours considérer qu'une densité spectrale quelconque peut s'écrire sous la forme (268). Pour chaque fréquence ω , le module de la réponse en fréquence du filtre est proportionnel à la racine carrée de la densité spectrale. Il existe des algorithmes permettant de retrouver la phase de $H(\omega)$ de sorte que ce filtre soit causal, stable et à minimum de phase (le filtre $H^{-1}(\omega)$ est stable si est $H(\omega)$ à minimum de phase). On peut alors filtrer le signal $y(t)$ par le filtre $H^{-1}(\omega)$ pour générer le bruit blanc $b(t)$ dont le filtrage par $H(\omega)$ donne $y(t)$ (fig. 63). Cette opération s'appelle le blanchiment du signal, le signal $b(t)$ ainsi obtenu est appelée innovation de $y(t)$.

7.3 Les signaux aléatoires échantillonnés

Les signaux aléatoires à temps continu ne peuvent pas être traités simplement. On peut tout au plus leur appliquer un filtrage analogique ou un opérateur non linéaire simple en vue de la détection par exemple. On ne peut guère leur appliquer des opérations complexes. De plus, il est en général difficile d'établir un développement mathématique rigoureux pour justifier théoriquement les analyses sur ces signaux.

L'échantillonnage et le traitement numérique ont permis d'appliquer une multitude de techniques élaborées et efficaces pour l'analyse de ces signaux aléatoires, tout en se fondant sur des bases mathématiques relativement simples: il est en général plus facile d'étudier les propriétés d'une suite de nombres que d'une suite de fonctions, ou d'étudier une série plutôt qu'une intégrale multiple. Dans ce chapitre, nous nous contenterons de transcrire au cas des signaux échantillonnés les propriétés essentielles des signaux aléatoires à temps continu. Ce sont les propriétés utilisées dans les applications les plus importantes. Ces propriétés sont pratiquement identiques, seule diffère l'écriture des expressions dans le domaine spectral. Dans le cas des signaux échantillonnés, on utilise la transformée en z .

7.3.1 L'échantillonnage des signaux aléatoires

Nous supposons toujours que la cadence d'échantillonnage est égale à un.

En pratique cet échantillonnage ne pose pas de problème particulier. Pour une réalisation donnée du processus, il faut s'assurer que les conditions de Shannon sont vérifiées: l'amplitude des composantes fréquentielles doivent être nulles pour les fréquences plus grandes que la moitié de la fréquence d'échantillonnage, ce qui implique que la densité spectrale (qui est une valeur moyenne) doit aussi être nulle pour les fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Si le signal analysé est gaussien, $X(\omega)$ est une variable aléatoire complexe à symétrie circulaire, elle est donc centrée. $X(\omega_1)$ est indépendant de $X(\omega_2)$ sauf quand $\omega_1 = -\omega_2$ dans le cas où $x(t)$ est réel. La densité spectrale du signal échantillonné est donnée par la périodisation de la densité spectrale du signal à temps continu (sauf à la moitié de la fréquence d'échantillonnage dans le cas des signaux réels).

7.3.2 Moyenne et fonction de covariance des signaux aléatoires échantillonnés

Les outils les plus importants sont encore les moments du premier et du deuxième ordre, la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal échantillonné. Nous supposons que les signaux sont réels. La moyenne est toujours

$$m = E(x(t)) \quad (269)$$

et la fonction de covariance qui est elle aussi une fonction échantillonnée

$$c(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad (270)$$

7.3.3 Cas des signaux stationnaires et ergodiques

Un signal aléatoire est stationnaire à l'ordre deux si ses moments d'ordre un et deux ne dépendent pas de l'origine du temps. La moyenne m est alors indépendante de t . La fonction de covariance $c(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$. On l'appelle souvent fonction d'autocorrélation

$$r(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (271)$$

On peut remplacer le calcul de la moyenne et de la fonction d'autocorrélation définis comme des espérances mathématiques calculées sur un grand nombre d'expériences par un calcul sur une seule réalisation. Si ce calcul est possible, on dit que le signal est ergodique, propriété qui est souvent supposée vérifiée. Un cas où cette propriété n'est pas vérifiée est celui du calcul d'une moyenne: on cherche à estimer la moyenne d'une donnée fluctuant au cours du temps, par exemple une pression. Tous les baromètres ont en général un réglage différent: si on mesure la même pression de référence que nous prendrons égale à zéro avec deux baromètres, chacun des baromètre indique une valeur différente. Cette valeur est aléatoire et dépend du baromètre. Donc si on utilise le résultat d'un seul baromètre pour calculer la moyenne de l'évolution de la pression au cours du temps, on ne

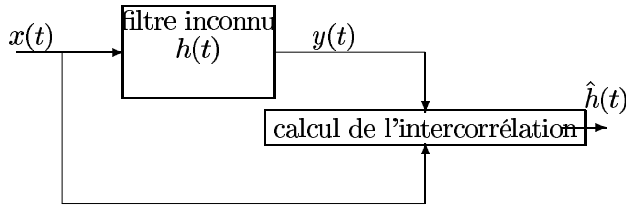


Figure 64: Calcul de l'intercorrélation entre le bruit blanc appliqué à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et la sortie de ce filtre afin d'en déduire une estimation de la réponse impulsionnelle du filtre

trouvera pas le même résultat qu'en effectuant un calcul de moyenne fondé sur l'utilisation des mesures données par tous les baromètres.

Dans le cas où les signaux sont ergodiques, on estime la moyenne et le moment d'ordre deux de la manière suivante. On suppose qu'on connaît T échantillons de $x(t)$, on suppose que $x(t)$ est nul en dehors de l'intervalle $[0, T - 1[$ et on calcule

$$m = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \quad (272)$$

$$r(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t)x(t+\tau) \quad (273)$$

7.3.4 Fonction d'intercorrélation

Dans certains problèmes, il est nécessaire d'étudier la fonction d'intercorrélation entre deux signaux.

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)] \quad (274)$$

Lorsque l'ensemble des deux signaux est stationnaire, cette intercorrélation ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$.

$$E[x(t_1)y(t_2)] = r_{xy}(t_1 - t_2) = r_{yx}(t_2 - t_1) \quad (275)$$

(Remarque, l'échange de l'ordre des deux signaux dont on calcule l'intercorrélation se traduit par un changement du sens du temps sur l'intercorrélation).

L'étude de la fonction d'intercorrélation entre l'entrée stationnaire $x(t)$ de variance σ^2 et la sortie $y(t)$ d'un système linéaire invariant dans le temps permet de retrouver la réponse impulsionnelle de ce système si les échantillons de $x(t)$ sont indépendants et de moyenne nulle (fig. 64).

Il n'est pas nécessaire que le système soit causal (fig. 65). En effet, si

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-k)h(k) \quad (276)$$

$$E[y(t)x(t-\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E[x(t-k)x(t-\tau)] \quad (277)$$

Comme les échantillons du signal d'entrée sont indépendants les uns des autres, tous les termes de la somme sur k sont nuls sauf lorsque $k = \tau$

$$E[y(t)x(t-\tau)] = h(\tau)\sigma^2 \quad (278)$$

Cette manière d'estimer la réponse impulsionnelle d'un système est utilisée lorsqu'il est impossible d'appliquer à l'entrée une impulsion qui pourrait, du fait de sa grande amplitude, modifier de manière non linéaire les caractéristiques du système.

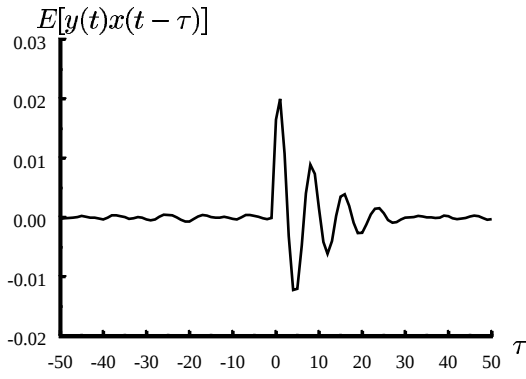


Figure 65: Exemple de fonction d'intercorrélation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire; on obtient la réponse impulsionnelle de ce système linéaire

7.3.5 Densité spectrale des signaux aléatoires échantillonnés

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est la densité spectrale. On peut en donner les deux écritures, l'expression en fonction des fréquences ou l'expression sous la forme d'une transformée en z définie dans une couronne entourant le cercle de rayon un.

$$R(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r(\tau)z^{-\tau} \quad (279)$$

$$R(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r(\tau)e^{-j\omega\tau} \quad (280)$$

Tout comme dans le cas des signaux à temps continu, cette densité spectrale est la moyenne du carré du module de la transformée de Fourier $X(e^{j\omega})$ d'une réalisation du processus aléatoire $x(t)$. C'est une fonction non négative. Plus généralement, la fonction d'autocorrélation est définie positive, c'est à dire que pour toute

$$R(e^{j\omega}) = E[|X(\omega)|^2] \quad (281)$$

Par exemple, si la fonction d'autocorrélation d'un signal est

$$r(\tau) = a^{-|\tau|} \quad (282)$$

où $|a| > 1$, sa densité spectrale s'écrit

$$R(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} a^{-|\tau|}z^{-\tau} \quad (283)$$

On peut écrire en séparant la somme en deux, l'une pour les temps positifs, l'autre pour les temps négatifs

$$R(z) = \sum_{\tau=-\infty}^0 a^{\tau}z^{-\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty} a^{-\tau}z^{-\tau} - 1 \quad (284)$$

La première série converge vers $\frac{a}{a-z}$ à condition que $|z| > 1/|a|$; la seconde converge vers $\frac{a}{a-z^{-1}}$ à condition que $|z| < |a|$. La densité spectrale est définie dans la couronne $1/|a| < |z| < |a|$, son expression est

$$R(z) = \frac{a^2 - 1}{(a - z)(a - z^{-1})} \quad (285)$$

Sa valeur sur le cercle de rayon un est

$$R(e^{j\omega}) = \frac{a^2 - 1}{(a - e^{j\omega})(a - e^{-j\omega})} \quad (286)$$

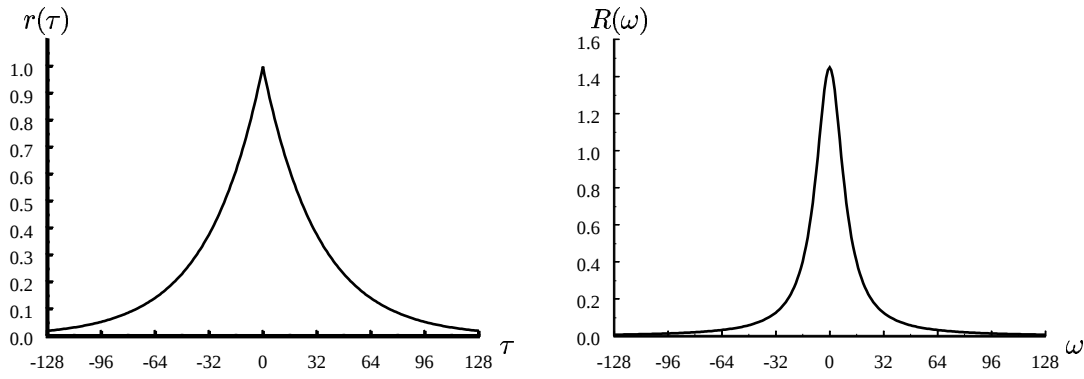


Figure 66: Exemple de fonction d'autocorrélation exponentielle et densité spectrale correspondante

$$R(e^{j\omega}) = \frac{a^2 - 1}{a^2 - 2a \cos(\omega) + 1} \quad (287)$$

Elle est toujours positive. La figure 66 donne la représentation graphique de cette autocorrélation et de cette densité spectrale. **Remarque:** La fonction d'intercorrrelation (274) a aussi une transformée de Fourier. Nous l'utiliserons dans le paragraphe consacré au filtrage des signaux aléatoires.

7.3.6 Justification approximative du calcul de la densité spectrale à partir de la fonction d'autocorrélation

Si on connaît une réalisation du processus $x(t)$, le carré du module de sa transformée de Fourier peut être estimé par

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{2T+1} \left[\sum_{t=-T}^T x(t) e^{-j\omega t} \right] \left[\sum_{u=-T}^T x(u) e^{j\omega u} \right] \quad (288)$$

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{2T+1} \sum_{t=-T}^T \sum_{u=-T}^T x(t)x(u) e^{-j\omega(t-u)} \quad (289)$$

En effectuant le changement de variables $u = t - \tau$, et en changeant l'ordre des sommations

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{2T+1} \sum_{\tau=-T}^T \sum_{t=-A(\tau)}^{B(\tau)} x(t)x(t-\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (290)$$

où, quand τ est positif, $A(\tau) = 0$ et $B(\tau) = T - \tau$

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \sum_{\tau=-T}^T e^{-j\omega\tau} \left[\frac{1}{2T+1} \sum_{t=-A(\tau)}^{B(\tau)} x(t)x(t-\tau) \right] \quad (291)$$

Pour τ fixé, on fait tendre T vers l'infini, et à condition que $r(\tau)$ tende rapidement vers zéro lorsque τ tend vers l'infini

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} r(\tau) \quad (292)$$

La moyenne du carré du module d'une composante sinusoïdale de $x(t)$ à la fréquence ω est donnée par la valeur de la densité spectrale (transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation) à cette fréquence. Ceci implique que la densité spectrale est une fonction non négative.

7.3.7 Calcul de la fonction d'autocorrélation à partir de la densité spectrale

Un échantillon de la fonction d'autocorrélation peut être calculé par la transformée de Fourier inverse (ou la transformée en z inverse si on suppose, ce qui est toujours le cas en pratique, que le cercle de rayon un appartient au domaine de convergence de cette transformée inverse).

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C R(z) z^\tau \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{j\omega}) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (293)$$

En particulier, si on effectue le calcul pour $\tau = 0$, on obtient le théorème de Parseval

$$E[x^2(t)] = r(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C R(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{j\omega}) d\omega \quad (294)$$

L'énergie du signal est donnée par l'intégrale de la densité spectrale.

7.3.8 Un exemple en transmission numérique

On considère un signal $x(t)$ constitué d'une suite de créneaux de durée T et prenant aléatoirement la valeur ± 1 avec la probabilité $1/2$ (fig. 67). C'est un signal couramment utilisé en télécommunications. Les instants nT où la valeur de $x(t)$ peut changer dépendent de la réalisation $x(t)$: pour

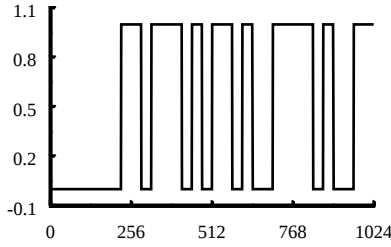


Figure 67: Un signal aléatoire utilisé en télécommunications.

chaque réalisation k , il y a un retard aléatoire ℓ_k équiréparti entre 0 et T . La moyenne de $x(t)$ est nulle. Deux valeurs $x(t)$ et $x(t')$ sont indépendantes si $|t - t'| \geq T$. On cherche la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de $x(t)$.

Pour calculer

$$r(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)], \quad (295)$$

on considère les deux cas $\tau < T$ et $T \leq \tau$. Dans le deuxième cas, il y a au moins un changement de données entre les instants t et $t + \tau$. Les valeurs de $x(t)$ et de $x(t + \tau)$ sont donc indépendantes et

$$r(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)]E[x(t+\tau)] = 0 \quad (296)$$

On vérifie a posteriori que $r(\tau)$ ne dépend pas de t , $x(t)$ est donc un signal stationnaire.

Dans le premier cas, $x(t)$ conservera sa valeur si les instants t et $t + \tau$ appartiennent au même intervalle de durée T et

$$E[x(t)x(t+\tau)] = 1. \quad (297)$$

La probabilité de ce cas de figure est $\frac{T-\tau}{T}$: il faut que

$$0 \leq t < T - \tau \quad (298)$$

Si ce n'est pas le cas, $x(t + \tau)$ sera une variable indépendante de $x(t)$. Cette situation se produit lorsque

$$T - \tau \leq t < T \quad (299)$$

$x(t)x(t + \tau)$ prend donc la valeur 1 avec la probabilité $\frac{\tau}{2T}$ et la valeur -1 avec la probabilité $\frac{\tau}{2T}$

$$r(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = 1 \cdot \frac{T - \tau}{T} + 1 \cdot \frac{\tau}{2T} - 1 \cdot \frac{\tau}{2T} \quad (300)$$

$$r(\tau) = \frac{T - \tau}{T} \quad (301)$$

La fonction d'autocorrélation étant symétrique

$$\begin{aligned} |\tau| < T & : r(\tau) = \frac{T - |\tau|}{T} \\ |\tau| \geq T & : r(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (302)$$

La densité spectrale de ce signal est donnée par la transformée de Fourier de $r(\tau)$ (fig. 68). La transformée d'une fonction "triangle" de largeur $2T$ est la transformée d'une convolution d'une fonction crêteau de largeur T par elle-même. Par conséquent, la transformée de Fourier d'une convolution étant un produit, la transformée de Fourier de $r(\tau)$ est

$$R(\omega) = \left[\int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j\omega dt) \right]^2 = \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]^2 \quad (303)$$

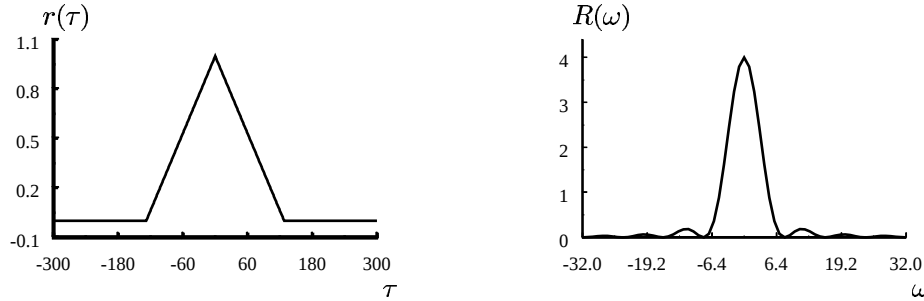


Figure 68: Autocorrélation et densité spectrale d'un signal télégraphique .

7.3.9 Séquences d'échantillons indépendants et identiquement distribués

L'équivalent échantillonné du bruit blanc est un signal dont les échantillons sont indépendants. Si tous les échantillons suivent la même loi de variance σ^2 , on dit qu'ils sont identiquement distribués (ce signal est donc stationnaire, on emploie souvent le terme abrégé "séquence i.i.d"). Si de plus ce signal est de moyenne nulle, sa fonction d'autocorrélation est

$$\begin{aligned} \tau = 0 & : r(0) = E[x^2(t)] = \sigma^2 \\ \tau \neq 0 & : r(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = 0 \end{aligned} \quad (304)$$

La densité spectrale de ce signal est une constante

$$R(z) = \sigma^2 \quad (305)$$

7.3.10 Génération d'une séquence de variables pseudo aléatoires

De nombreuses simulations en traitement du signal nécessitent de simuler une séquence ressemblant à un bruit blanc. La technique rigoureuse consisterait à engendrer une séquence par mesure d'un phénomène physique aléatoire comme un bruit thermique ou un phénomène quantique. On peut tout de même se contenter d'une méthode plus simple pour engendrer une séquence ressemblant à

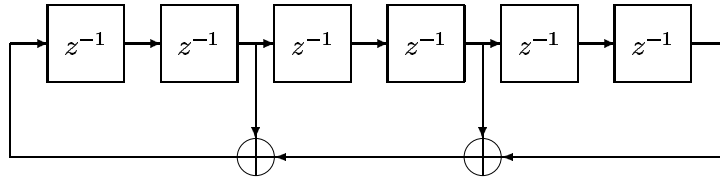


Figure 69: Représentation d'un registre à décalage bouclé (les opérations z^{-1} représentent des retards ou des mémorisations) par des fonctions "ou exclusif" permettant d'engendrer une séquence de nombres pseudo aléatoires

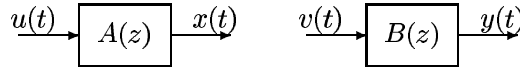


Figure 70: Deux signaux aléatoires filtrés

une séquence i.i.d. On peut par exemple initialiser un registre à décalage (fig. 69). Si l'initialisation et les sorties des registres utilisées pour calculer la rétroaction sont convenablement choisis, le signal ainsi engendré une autocorrélation proche de celle d'un bruit blanc. On peut aussi calculer des nombres de la forme

$$x(t) = a^{x(t-1)} \text{ modulo } b \quad (306)$$

Bien entendu, cette forme de génération de signaux pseudo-aléatoire est tout à fait déterministe.

7.3.11 Filtrage des signaux aléatoires échantillonnés

Soient deux signaux $u(t)$ et $v(t)$ filtrés respectivement par $A(z)$ et $B(z)$ (fig.70)

$$A(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a(t)z^{-t} \quad (307)$$

$$B(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} b(t)z^{-t} \quad (308)$$

pour produire deux signaux $x(t)$ et $y(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)u(t-k) \quad (309)$$

$$y(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b(\ell)v(t-\ell) \quad (310)$$

On calcule la fonction d'intercorrélation des sorties

$$r_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)u(t-k) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b(\ell)v(t-\ell+\tau)\right] \quad (311)$$

qu'on réécrit

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b(\ell)E[u(t-k)v(t-\ell+\tau)] \quad (312)$$

On suppose que $u(t)$ et $v(t)$ sont stationnaires et que leur fonction d'intercorrélation est $r_{uv}(\tau)$

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b(\ell) r_{uv}(\tau + k - \ell) \quad (313)$$

L'intercorrélation de $x(t)$ et $y(t)$ ne fait pas intervenir t . Ces deux signaux sont aussi conjointement stationnaires. Leur fonction d'intercorrélation est obtenue en effectuant une double convolution: premièrement, la fonction $r_{uv}(\tau)$ est convoluée avec la réponse impulsionnelle $b(\ell)$ pour engendrer un signal $r_{uy}(\tau)$

$$r_{uy}(\tau) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b(\ell) r_{uv}(\tau - \ell) \quad (314)$$

puis on filtre cette fonction par le signal $a(-k)$ obtenu à partir de $a(k)$ en changeant le sens du temps

$$r_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) r_{uy}(\tau + k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(-k) r_{uy}(\tau - k) \quad (315)$$

Cette double convolution s'exprime, en termes de transformées en z .

$$R_{uy}(z) = B(z) R_{uv}(z) \quad (316)$$

$$R_{xy}(z) = A(z^{-1}) R_{uy}(z) \quad (317)$$

$$R_{xy}(z) = A(z^{-1}) B(z) R_{uv}(z) \quad (318)$$

Dans le cas particulier où les deux signaux d'entrée sont identiques ($u(t) = v(t)$) ainsi que les deux filtres ($A(z) = B(z)$)

$$R_{xx}(z) = A(z^{-1}) A(z) R_{uu}(z) \quad (319)$$

Ainsi, la densité spectrale du signal filtré est égale à la densité spectrale du signal en entrée du filtre multipliée par le carré du module de la réponse en fréquence du filtre.

En utilisant cette approche, on peut retrouver le résultat (302): on obtient le signal $x(t)$ de la section 7.3.8 en filtrant une séquence d'impulsions d'amplitude aléatoire ± 1 émises à une cadence T par le filtre dont la réponse impulsionnelle est le créneau

$$0 \leq t < T \quad : \quad h(t) = 1 \quad (320)$$

La densité spectrale est donnée par le carré du module de la réponse en fréquence de ce filtre, qui est bien (303).

7.3.12 Estimation spectrale

Pour estimer une densité spectrale en disposant de plusieurs réalisations de durée finie, on procède de la manière suivante: on découpe chacune des réalisations en séquences de longueur identique (quand on dispose de relativement peu de signaux il peut être envisagé de faire une découpe du signal où les séquences se chevauchent de 10 à 20 %). Pour chacune d'entre elles on calcule le carré du module de la transformée de Fourier après lui avoir appliqué une fenêtre d'analyse spectrale (cf. paragraphe 6.7) pour atténuer les effets de limitation en temps des séquences du signal. On calcule ensuite la moyenne de ces différentes estimations élémentaires de la densité spectrale. La précision de cette forme d'estimation spectrale dépend du nombre de séquences utilisées dans ce calcul de moyenne. Rappelons que d'après la loi des grands nombres de la théorie des probabilités, l'écart-type d'une moyenne m de N variables aléatoires de même loi ne décroît que comme $1/\sqrt{N}$, c'est à dire très lentement.

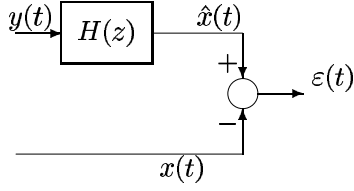
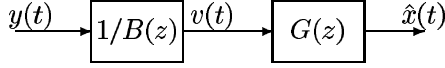


Figure 71: Schéma du filtrage de Wiener

Figure 72: Blanchiment du signal $y(t)$ ramenant le calcul de $H(z)$ au calcul de $G(z)$

7.3.13 Filtrage de Wiener

Pour optimiser la séparation d'un signal et d'un bruit de mesure et atténuer les distorsions apportées par un filtre à un signal, on a posé le problème de la manière suivante: On suppose qu'un signal stationnaire $x(t)$ de densité spectrale connue, $R_{xx}(z)$ est déformé et entâché d'un bruit de mesure stationnaire. Soit $R_{yy}(z)$ la densité spectrale, elle aussi connue, de ce signal $y(t)$, version déformée de $x(t)$. On connaît l'intercorrrelation $R_{xy}(t)$ entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$. On cherche un filtre $H(z)$ dont la sortie sera $\hat{x}(t)$ de manière à minimiser l'énergie $E[\varepsilon^2(t)]$ de l'erreur entre le signal original $x(t)$ et sa prédiction $\hat{x}(t)$ à partir du signal filtré (cf fig. 71)

$$\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t). \quad (321)$$

Nous supposons que $y(t)$ a été engendré par un bruit blanc $v(t)$ de variance σ^2 filtré par un filtre linéaire causal et stable dont la réponse impulsionnelle a pour transformée en z $B(z)$. On peut écrire $R_{yy}(z)$ sous la forme

$$R_{yy}(z) = \sigma^2 B(z) B(z^{-1}) \quad (322)$$

($B(z)$ est appelé "facteur spectral" de $R_{yy}(z)$, cf le paragraphe à la fin de cette section). Ce filtre $B(z)$ a un inverse $1/B(z)$ qui est lui aussi causal et stable.

La recherche du filtre $H(z)$ se ramène alors à la recherche d'un filtre $G(z)$ dont la réponse impulsionnelle est $g(t)$. L'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ peut alors s'écrire

$$\varepsilon(t) = x(t) - \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) v(t - \tau) \quad (323)$$

La variance de $\varepsilon(t)$ peut s'écrire alors en fonction de σ^2 , de $g(t)$, de la variance de $x(t)$, soit $r_{xx}(0)$ et de l'intercorrrelation $r_{vx}(\tau)$

$$E[\varepsilon^2(t)] = r_{xx}(0) - 2 \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) r_{vx}(\tau) + \sigma^2 \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g^2(\tau) \quad (324)$$

qu'on peut réécrire

$$E[\varepsilon^2(t)] = r_{xx}(0) - 2 \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \left[\sigma g(\tau) - \frac{r_{vx}(\tau)}{\sigma} \right]^2 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_{vx}^2(\tau) \quad (325)$$

$E[\varepsilon^2(t)]$ est minimale lorsque

$$g(\tau) = \frac{r_{vx}(\tau)}{\sigma^2} \quad (326)$$

soit si on exprime cette relation en termes de transformées en z

$$G(z) = \frac{1}{\sigma^2} R_{vx}(z) \quad (327)$$

où $R_{vx}(z)$ est la transformée en z de $r_{vx}(\tau)$. On peut exprimer $R_{vx}(z)$ en fonction de $R_{xy}(z)$

$$R_{vx}(z) = R_{xv}(z^{-1}) = \frac{R_{xy}(z^{-1})}{B(z^{-1})} \quad (328)$$

et

$$G(z) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{R_{xy}(z^{-1})}{B(z^{-1})} \quad (329)$$

En divisant par $B(z)$, on obtient le filtre cherché

$$H(z) = \frac{R_{xy}(z^{-1})}{\sigma^2 B(z) B(z^{-1})} = \frac{R_{xy}(z^{-1})}{R_{yy}(z)} \quad (330)$$

Toutefois, ce filtre n'est pas nécessairement réalisable, car il n'est pas nécessairement causal.

Application à la séparation d'un signal et d'un bruit Si $y(t)$ est la somme de $x(t)$ et d'un bruit de mesure $w(t)$ indépendant de $x(t)$ et de densité spectrale $R_{ww}(z)$

$$y(t) = x(t) + w(t) \quad (331)$$

on a les expressions

$$R_{yy}(z) = R_{xx}(z) + R_{ww}(z) \quad (332)$$

$$R_{xy}(z) = R_{yx}(z) = R_{xx}(z) = R_{xx}(z^{-1}) \quad (333)$$

Le filtre optimal (non causal) est alors

$$H(z) = \frac{R_{xx}(z)}{R_{xx}(z) + R_{ww}(z)} \quad (334)$$

Il atténue le gain pour les fréquences où l'énergie du bruit de mesure est importante.

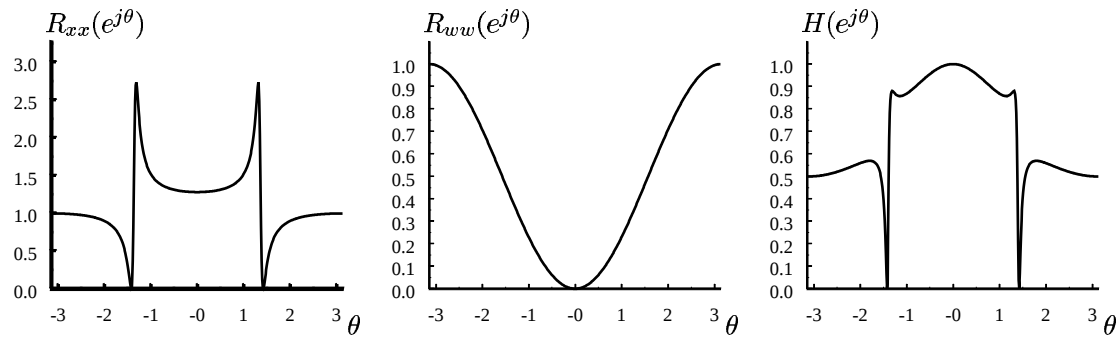


Figure 73: Filtre optimal pour la séparation d'un signal et d'un bruit

Expression d'une solution causale et stable Si on contraint la solution à être causale, les échantillons de $g(t)$ doivent être nuls pour les valeurs négatives de t . Le minimum de la variance $E[\varepsilon^2(t)]$ est alors obtenu lorsque

$$\begin{aligned} t \geq 0 & : g(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} r_{vx}(\tau) \\ t < 0 & : g(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (335)$$

On notera $[R_{vx}(z)]_+$ la transformée en z de la réponse impulsionnelle causale $g(t)$

$$[R_{vx}(z)]_+ = \left[\frac{R_{xy}(z^{-1})}{\sigma^2 B(z^{-1})} \right]_+ \quad (336)$$

$$H(z) = \frac{1}{\sigma^2 B(z)} \left[\frac{R_{xy}(z^{-1})}{B(z^{-1})} \right]_+ \quad (337)$$

Le calcul de $H(z)$ se fait en trois étapes:

- filtrage de l'intercorrélation $R_{xy}(z^{-1})$ par $1/B(z^{-1})$
- suppression de la partie non causale de cette séquence
- filtrage du résultat par le filtre causal $1/B(z)$

Mise en œuvre dans un cas simple Si on suppose que le filtre recherché est un filtre à réponse impulsionnelle finie, on peut en calculer les coefficients par résolution d'un système linéaire d'équations:

La prédiction $\hat{x}(t)$ s'écrit alors

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^q b(k)y(t-k) \quad (338)$$

et on cherche à minimiser la forme quadratique

$$\sum_{t=q}^T \left[x(t) - \sum_{k=0}^q b(k)y(t-k) \right]^2 \quad (339)$$

ceci revient à résoudre le système de $p+1$ équations à $p+1$ inconnues

$$\begin{pmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) & \cdots & r_{yy}(q) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) & \cdots & r_{yy}(q-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(q) & r_{yy}(q-1) & \cdots & r_{yy}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xy}(0) \\ r_{xy}(1) \\ \vdots \\ r_{xy}(q) \end{pmatrix} \quad (340)$$

où on a posé, en supposant que les signaux sont stationnaires

$$r_{xy}(k) = \sum_{t=q}^T x(t)y(t-k) \quad (341)$$

$$r_{yy}(k) = \sum_{t=q}^T y(t)y(t-k) \quad (342)$$

Une méthode de résolution de ce système d'équations peut être fondée sur l'algorithme de Levinson que nous verrons au chapitre 8.

Blanchiment, factorisation spectrale Si $R_{yy}(z)$ est une fraction rationnelle sans pôles et sans zéros sur le cercle de rayon un, le calcul de $B(z)$ est toujours possible: il se ramène à la recherche des facteurs du numérateur et du dénominateur de $R_{yy}(z)$ dont les racines sont à l'intérieur du cercle de rayon un. $R_{yy}(z)$ étant symétrique, si z_0 est racine du numérateur (resp. du dénominateur) de $R_{yy}(z)$, z_0^{-1} l'est aussi et les racines du numérateur (resp. du dénominateur) de $R_{yy}(z)$ extérieures au cercle de rayon un se regroupent bien dans le facteur $B(z^{-1})$. Nous verrons dans le chapitre 8, portant sur l'étude de la prédiction linéaire, l'algorithme de Schur qui permet une programmation simple de ce calcul du facteur spectral.

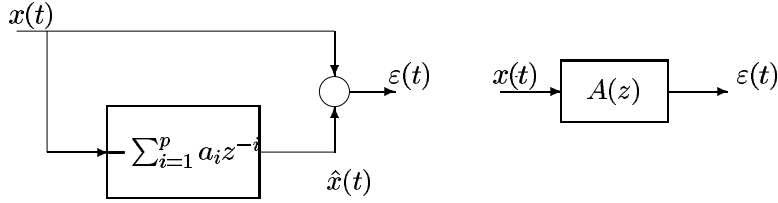


Figure 74: Deux représentations équivalentes du calcul de l'erreur de prédiction dans la méthode de prédiction linéaire

8 Prédiction linéaire

Cette technique me paraît être une excellente illustration des techniques de traitement numérique du signal: d'une part elle permet de mettre en oeuvre les différents outils étudiés, filtrage, transformée en z , outils de traitement des signaux aléatoires; et d'autre part il s'est avéré que cette méthode de traitement s'applique bien au signal vocal comme le codage de parole à débit réduit en téléphonie numérique ou pour extraire des paramètres qui serviront de base à la reconnaissance vocale.

L'idée de base est de trouver les paramètres d'un filtre non récursif

$$A(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} \quad (343)$$

de telle sorte qu'on prédise le mieux possible les échantillons du signal $x(t)$ à partir d'une combinaison linéaire des échantillons précédents

$$\hat{x}(t) = - \sum_{i=1}^p a_i x(t-i) \quad (344)$$

On cherchera ainsi à minimiser la variance de l'erreur de prédiction

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i x(t-i) \quad (345)$$

8.1 Modèles autorégressifs

Soit un signal $x(t)$, qu'on suppose être stationnaire et de moyenne nulle.

On en calcule les coefficients de corrélation pour $\tau = 0, \dots, p$:

$$r(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} \quad (346)$$

Dans le cas de l'analyse du signal de parole, cette hypothèse de stationnarité n'est pas vérifiée et on considère que $x(t)$ est connu sur un intervalle de temps $[0, \dots, T-1]$ et que $x(t)$ est nul en dehors de cet intervalle. On calcule alors $r(\tau)$ de la manière suivante

$$r(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t)x(t+\tau) \quad (347)$$

On cherche à trouver les coefficients d'un filtre non récursif de degré p , $A_p(z)$

$$A_p(z) = \sum_{i=0}^p a_i^{(p)} z^{-i} \quad (348)$$

où $a_0^{(p)} = 1$ dont l'entrée est $x(t)$ et la sortie $\varepsilon_p(t)$. On cherche à minimiser la variance de $\varepsilon_p(t)$ qu'on nommera $\sigma_{(p)}^2$

$$\sigma_{(p)}^2 = E\left\{\left[\sum_{i=0}^p a_i^{(p)} x(t-i)\right]^2\right\} \quad (349)$$

$\varepsilon_p(t)$ peut être interprétée comme l'erreur de prédiction entre le signal $x(t)$ et sa prédiction linéaire calculée à partir des échantillons précédents

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^p a_i^{(p)} x(t-i). \quad (350)$$

En développant le carré

$$\sigma_{(p)}^2 = \sum_{i=0}^p a_i^{(p)} \left[\sum_{k=0}^p a_k^{(p)} E\{x(t-i)x(t-k)\} \right] \quad (351)$$

$$\sigma_{(p)}^2 = \sum_{i=0}^p a_i^{(p)} \left[\sum_{k=0}^p a_k^{(p)} r(i-k) \right] \quad (352)$$

En dérivant cette forme quadratique par rapport aux paramètres cherchés $a_1^{(p)}, \dots, a_p^{(p)}$, on obtient le minimum lorsque sont satisfaites les p équations suivantes, écrites sous une forme matricielle

$$\begin{pmatrix} r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \cdots & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ \vdots \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (353)$$

Lorsque ces p équations sont vérifiées, la formule (352) donnant la valeur de la variance se simplifie : lorsque $i \neq k$:

$$\sum_{k=0}^p a_k^{(p)} r(i-k) = 0 \quad (354)$$

et

$$\sigma_{(p)}^2 = \sum_{k=0}^p a_k^{(p)} r(i-k) \quad (355)$$

En combinant cette équation avec l'équation matricielle (353), on obtient

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \cdots & r(p) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \cdots & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ a_2^{(p)} \\ \vdots \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{(p)}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (356)$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équations de Yule Walker. La matrice des coefficients d'autocorrélation, $\mathbf{R}_p$ qui y apparaît a une forme bien particulière : tous ses éléments situés sur des parallèles à la diagonale principale sont identiques, on dit que c'est une matrice de Toeplitz. Elle est de plus symétrique.

Remarque : l'application d'une matrice de Toeplitz à un vecteur s'interprète comme la convolution de la séquence associée à ce vecteur avec la séquence permettant d'engendrer la matrice.

8.2 Algorithme de Levinson

De cette structure très particulière de la matrice se déduit une méthode itérative de résolution très simple :

Supposons qu'on connaisse la solution à l'ordre $(p-1)$ de (356), soit

$$[a_0^{(p-1)}, a_1^{(p-1)}, \dots, a_{p-1}^{(p-1)}]^T.$$

Si on complète ce vecteur par une p -ième coordonnée égale à zéro et qu'on lui applique la matrice $\mathbf{R}_p$ on obtient

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \cdots & r(p-1) & r(p) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(p-2) & r(p-1) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \cdots & r(p-3) & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ r(p-1) & r(p-2) & r(p-3) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(1) & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(p-1)} \\ a_1^{(p-1)} \\ a_2^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p-1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{(p-1)}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k) \end{pmatrix} \quad (357)$$

On peut appliquer la matrice $\mathbf{R}_p$ au vecteur

$$[0, a_{p-1}^{(p-1)}, \dots, a_1^{(p-1)}, a_0^{(p-1)}]^T.$$

Comme $\mathbf{R}_p$ est centro-symétrique, on obtient :

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \cdots & r(p-1) & r(p) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(p-2) & r(p-1) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \cdots & r(p-3) & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ r(p-1) & r(p-2) & r(p-3) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(1) & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{p-1}^{(p-1)} \\ a_{p-2}^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_1^{(p-1)} \\ a_0^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{(p-1)}^2 \end{pmatrix} \quad (358)$$

Les deux membres de droite de (358) et de (359) ont toutes leurs composantes nulles sauf la première et la dernière. On cherche une solution de (356) telle que toutes les composantes du vecteur de droite sont nulles. On peut l'obtenir en effectuant une combinaison linéaire de

$$[a_0^{(p-1)}, a_1^{(p-1)}, \dots, a_{p-1}^{(p-1)}]^T$$

et de

$$[0, a_{p-1}^{(p-1)}, \dots, a_1^{(p-1)}, a_0^{(p-1)}]^T$$

soit

$$\begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ a_2^{(p)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p)} \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^{(p-1)} \\ a_1^{(p-1)} \\ a_2^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + k_{p-1} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{p-1}^{(p-1)} \\ a_{p-2}^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_1^{(p-1)} \\ a_0^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad (359)$$

En appliquant $\mathbf{R}_p$

$$\mathbf{R}_p \begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ a_2^{(p)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p)} \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{(p-1)}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k) \end{pmatrix} + \mathbf{k}_{p-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{(p-1)}^2 \end{pmatrix} \quad (360)$$

On choisit k_{p-1} de manière à annuler le dernier élément du vecteur de droite, et

$$k_{p-1} = -\frac{\sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k)}{\sigma_{(p-1)}^2} \quad (361)$$

k_{p-1} s'appelle souvent "coefficient de corrélation partielle" ou "parcor". On remarque que le premier élément du vecteur de droite est $\sigma_{(p)}^2$ et que par conséquent

$$\sigma_{(p)}^2 = \sigma_{(p-1)}^2 + k_{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k) \quad (362)$$

En remplaçant $\sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k)$ par sa valeur donnée par l'équation (355) écrite à l'ordre $(p-1)$

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k^{(p-1)} r(p-k) = -k_{p-1} \sigma_{(p-1)}^2 \quad (363)$$

$$\sigma_{(p)}^2 = \sigma_{(p-1)}^2 [1 - k_{p-1}^2] \quad (364)$$

8.3 Equivalence des algorithmes de Levinson et de Schur Cohn

Comme les variances sont des réels positifs, on en déduit que k_{p-1} est un nombre compris entre -1 et $+1$. Or, on remarque que la récurrence de Levinson est exactement la même que celle qu'on a développée dans le cas du filtre en treillis à partir de l'algorithme de Schur-Cohn. Voici l'écriture de l'algorithme de Levinson (359)

$$\begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ a_2^{(p)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p)} \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^{(p-1)} \\ a_1^{(p-1)} \\ a_2^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_p^{(p-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + k_{p-1} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{p-1}^{(p-1)} \\ a_{p-2}^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_1^{(p-1)} \\ a_0^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad (365)$$

et l'écriture correspondante de l'algorithme de Schur-Cohn

$$\begin{pmatrix} a_0^{(p-1)} \\ a_1^{(p-1)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p-1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - k_{p-1}^2} \begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{(p)} \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} - \frac{k_{p-1}}{1 - k_{p-1}^2} \begin{pmatrix} a_p^{(p)} \\ a_{p-1}^{(p)} \\ \vdots \\ a_1^{(p)} \\ a_0^{(p)} \end{pmatrix} \quad (366)$$

L'écriture en termes de combinaisons de vecteurs peut se traduire en termes de combinaisons de polynômes. Dans les équations qui suivent, on associe toujours au vecteur

$$\left(a_0^{(p)}, a_1^{(p)}, \dots, a_{p-1}^{(p)}, a_p^{(p)} \right)^T \quad (367)$$

le polynôme en z^{-1} $A_p(z)$ et au vecteur

$$\left(a_p^{(p)}, a_{p-1}^{(p)}, \dots, a_1^{(p)}, a_0^{(p)}\right)^T \quad (368)$$

le polynôme en z^{-1}

$$[z^{-p}A_p(z^{-1})].$$

L'algorithme de Levinson s'écrit ainsi

$$\begin{pmatrix} A_p(z) \\ z^{-p}A_p(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_{p-1}z^{-1} \\ k_{p-1} & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{p-1}(z) \\ z^{-p+1}A_{p-1}(z^{-1}) \end{pmatrix} \quad (369)$$

et l'écriture correspondante de l'algorithme de Schur-Cohn devient

$$\begin{pmatrix} A_{p-1}(z) \\ z^{-p+1}A_{p-1}(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k_{p-1}^2} & \frac{-k_{p-1}}{1-k_{p-1}^2} \\ \frac{-k_{p-1}z}{1-k_{p-1}^2} & \frac{z}{1-k_{p-1}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p(z) \\ z^{-p}A_p(z^{-1}) \end{pmatrix} \quad (370)$$

Les matrices apparaissant dans les équations (369) et (370) sont inverses l'une de l'autre. On en déduit donc que le polynôme $z^p A_p(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur du disque de rayon 1 et que le filtre $1/A_p(z)$ est stable.

8.4 Cas des signaux vectoriels et complexes

La méthode de recherche d'un filtre optimal s'étend directement au cas des signaux vectoriels à valeurs complexes. Il faut définir les corrélations à partir des vecteurs complexes conjugués transposés

$$r(\tau) = E\{x(t)x^*(t+\tau)\} \quad (371)$$

tenir et compte du fait que les produits de matrices ne sont pas commutatifs. On fait alors apparaître deux filtres prédicteurs l'un dans le sens direct et l'autre dans le sens rétrograde et deux coefficients de corrélation partielle.

8.5 Justification de la méthode d'identification

Si le signal $x(t)$ a effectivement été engendré par un bruit blanc (ou plutôt une séquence i.i.d.) stationnaire de variance σ_v^2 filtré par un filtre récursif $1/B(z)$, où

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}, \quad (372)$$

(où $b_0 = 1$) causal et stable, la transformée en z de sa fonction d'autocorrélation (sa densité spectrale

$$R(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} r(\tau) z^{-\tau} \quad (373)$$

vérifie

$$R(z) = \frac{\sigma_v^2}{B(z)B(z^{-1})} \quad (374)$$

ou bien

$$R(z)B(z) = \frac{\sigma_v^2}{B(z^{-1})} \quad (375)$$

Si on calcule la transformée en z inverse de cette équation, en remarquant que $1/B(z)$ est la transformée en z d'une séquence causale et par conséquent que les échantillons obtenus à partir de $1/B(z^{-1})$ sont nuls pour les temps positifs, on obtient

$$\sum_{k=0}^q b_k r_k = \sigma_v^2 \quad (376)$$

et pour $\tau > 0$

$$\sum_{k=0}^q b_k r_{\tau-k} = 0 \quad (377)$$

Les coefficients b_k vérifient bien les équations de Yule-Walker; comme la solution de ces équations est unique, le méthode qui en découle permet de retrouver les coefficients du système à condition que l'ordre du modèle soit au moins égal à celui du système étudié. Il est cependant possible de donner une justification de la méthode même lorsque l'ordre du modèle n'est pas celui du système étudié.

8.6 Critère de similarité entre densités spectrales

Cette intéressante interprétation est donnée par Markel et Gray, "*linear prediction of speech*", édité par Springer et Verlag en 1976: On considère l'intégrale suivante qui permet de calculer une distance entre la densité spectrale du signal étudié $R(e^{j\theta})$ et la densité spectrale du signal obtenu en filtrant $\varepsilon_p(t)$ par le filtre récursif $1/B_p(z)$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{R(e^{j\theta})}{\sigma^2/|B_p(e^{j\theta})|^2} - \log \frac{R(e^{j\theta})}{\sigma^2/|B_p(e^{j\theta})|^2} - 1 \right) d\theta \quad (378)$$

On vérifie que c'est bien l'intégrale d'une fonction positive du type $u - \log u - 1$ étudiée au voisinage de $u = 1$. On cherche parmi tous les couples $\{\sigma^2, B_p(z)\}$ (vérifiant toujours $a_0^{(p)} = 1$), celui qui minimise I lorsque $R(z)$ est donné. L'intégrale I_1 du premier terme de la somme est proportionnelle à la variance σ_p^2 du signal obtenu en filtrant $x(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle finie $B_p(z)$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{j\theta}) |B_p(e^{j\theta})|^2 d\theta \quad (379)$$

et

$$I_1 = \sigma_p^2 / \sigma^2 \quad (380)$$

On peut simplifier le deuxième terme (soit I_2) en remarquant que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(|B_p(e^{j\theta})|^2) d\theta = 0 \quad (381)$$

lorsque $z^p B_p(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle de rayon 1. En effet, dans ce cas, la fonction $\log(1 + \alpha z^{-1})$ est une fonction holomorphe dans le disque de rayon 1 car $\alpha < 1$, son intégrale le long du cercle de rayon 1 est donc nulle. On en déduit que l'intégrale du second terme ne dépend pas de $B_p(z)$ (à condition que le filtre $1/B_p(z)$ soit stable). I_2 s'écrit

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\log \frac{R(e^{j\theta})}{\sigma^2} \right) d\theta \quad (382)$$

et l'intégrale de la somme des trois termes

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma^2} - \log \frac{R(e^{j\theta})}{\sigma^2} - 1 \right) d\theta \quad (383)$$

σ_p^2 n'apparaît que dans le premier terme. Lorsqu'on fait varier σ_p^2 pour une valeur donnée de σ^2 , I atteint son minimum lorsque σ_p^2 est elle-même minimale, c'est-à-dire lorsque le filtre $1/B_p(z)$ vérifie les équations de Yule-Walker et minimise la variance du signal résiduel $\varepsilon(t)$: c'est le filtre $1/A_p(z)$ trouvé en résolvant les équations de Yule-Walker. Une fois déterminé le filtre optimal, $1/A_p(z)$, il reste à trouver la valeur optimale de σ^2 .

σ_p^2 étant connu, le minimum de I est obtenu lorsque sa dérivée par rapport à σ s'annule, soit lorsque

$$\sigma^2 = \sigma_p^2 \quad (384)$$

Le couple $\sigma_p^2, A_p(z)$ minimise donc le critère I . La valeur du minimum est donnée en reportant l'eq.(384) dans l'eq.(383)

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\log \frac{R(e^{j\theta})}{\sigma_p^2} d\theta \quad (385)$$

Il est utile d'analyser d'un peu plus près ce critère I pour se faire une idée de la contribution des différents écarts de la forme

$$\Delta R(\theta) = \log R(e^{j\theta}) - \log \frac{\sigma_p^2}{|A_p(e^{j\theta})|^2} \quad (386)$$

dans l'intégrale I . La contribution de $\Delta R(\theta)$ dans I est:

$$e^{\Delta R(\theta)} - \Delta R(\theta) - 1. \quad (387)$$

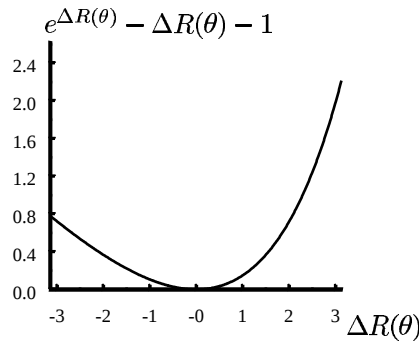


Figure 75: Importance de la contribution des écarts dans le modèle d'un spectre obtenu par prédiction linéaire: les composantes qui sont plus grandes que celles du modèle ont un poids plus élevé que les composantes qui sont plus petites que celles du modèle, si bien qu'elles sont mieux modélisées; le spectre du modèle de prédiction linéaire apparaît comme un lissage des composantes spectrales d'amplitude élevée

Si $\Delta R(\theta)$ est négatif, le terme prépondérant sera $\Delta R(\theta)$, alors que si $\Delta R(\theta)$ est positif, le terme prépondérant sera $e^{\Delta R(\theta)}$. Par conséquent, une valeur positive de $\Delta R(\theta)$ aura un poids $e^{\Delta R(\theta)}$ plus important qu'une valeur négative de même amplitude dont la contribution sera $|\Delta R(\theta)|$. Le modèle fondé sur prédiction linéaire et la minimisation de la variance du signal résiduel donnera surtout une fonction qui représentera bien les maxima du spectre, mais modélisera moins bien les minima. Ce modèle sera bien adapté à l'analyse du signal vocal où il est important de représenter les résonances du filtre plus que les zéros de transmission.

8.7 Application à l'analyse et la synthèse de la parole

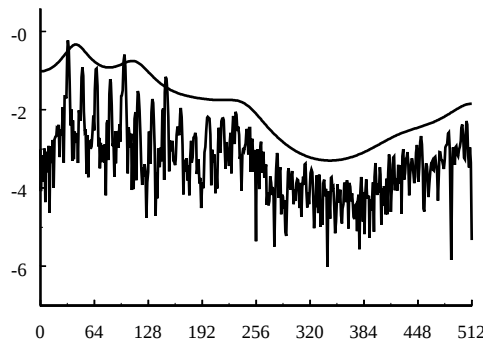


Figure 76: Spectre du signal et sa modélisation par prédiction linéaire

spectre à court terme

autocorrélation

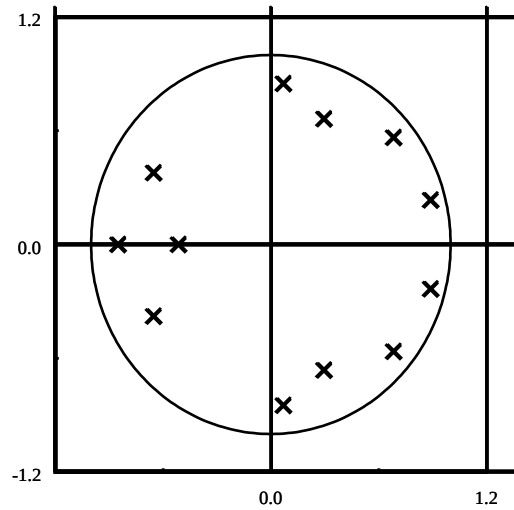


Figure 77: Pôles du modèle autorégressif correspondant

modèle: pôles, réponse en fréquence réponse impulsionnelle

signal résiduel

signal synthétisé

mise en oeuvre dans le gsm

8.8 Application à la synthèse de filtres linéaires

Nous avons vu au paragraphe 5.6.3 consacré à la synthèse des filtres que cette technique peut être employée pour trouver les coefficients d'un filtre comportant à la fois des pôles et des zéros et approximant une réponse en fréquence donnée.

8.9 Modèles à moyenne mobile (MA), factorisation spectrale

La méthode d'identification des filtres récurrents décrite dans le paragraphe 8.1 permettant d'obtenir un filtre dont la stabilité est garantie et vérifiant

$$\frac{\sigma^2}{A(z)A(z^{-1})} = R(z) \quad (388)$$

peut s'étendre au calcul des paramètres d'un filtre $B_q(z)$ non-récurrent à minimum de phase, c'est à dire tel que toutes les racines de $z^q B(z)$ se trouvent à l'intérieur du cercle de rayon un et vérifiant

$$B_q(z)B_q(z^{-1}) = R(z) \quad (389)$$

On dit que $B_q(z)$ est le facteur spectral de $R(z)$. La récurrence permettant d'obtenir ce facteur spectral se déduit directement de l'algorithme de Levinson en modifiant la matrice $\mathbf{R}_p$ apparaissant dans l'équation (356) : on la remplace par une matrice de Toeplitz dont le nombre de lignes est

infini et dont le nombre de colonnes est $p + 1$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r(2) & r(3) & \dots & r(p+2) \\ r(1) & r(2) & \dots & r(p+1) \\ r(0) & r(1) & \dots & r(p) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p) & r(p-1) & \dots & r(0) \\ r(p+1) & r(p) & \dots & r(1) \\ r(p+2) & r(p+1) & \dots & r(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(p)} \\ a_1^{(p)} \\ \vdots \\ a_p^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ e_2^{(p)} \\ e_1^{(p)} \\ e_0^{(p)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{-p-1}^{(p)} \\ e_{-p-2}^{(p)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (390)$$

où on a posé

$$e_0^{(p)} = \sigma_{(p)}^2 \quad (391)$$

Ceci revient à filtrer la fonction d'autocorrélation $r(\tau)$ par le filtre à réponse impulsionnelle $A_p(z)$. Dans ce cas on peut reformuler l'algorithme de Levinson en appliquant la matrice de l'équation (390) à l'équation récurrente (359), ce qui donne pour tout m

$$e_m^{(p)} = e_m^{(p-1)} + k_{p-1} e_{p-m}^{(p-1)} \quad (392)$$

et k_{p-1} s'écrit aussi en fonction de $e_m^{(p)}$

$$k_{p-1} = -\frac{e_{-p}^{(p-1)}}{e_0^{(p-1)}} \quad (393)$$

On peut montrer, en appliquant l'inégalité de Schwarz, que toutes les valeurs $e_m^{(p)}$ sont bornées par

$$|e_m^{(p)}| < [r(0)e_0(p)]^{1/2} \quad (394)$$

ce qui a permis l'utilisation de cet algorithme (connu sous le nom d'algorithme de Schur) dans de processeurs en virgule fixe pour le codage de la parole dans les systèmes de téléphonie mobile GSM.